

Modulární systém dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků JmK
v přírodních vědách a informatice
CZ.1.07/1.3.10/02.0024

Binární kódování - základní materiál



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Binární kódování - materiál pro učitele

Tato sekce poskytuje náměty na hry, aktivity a logické úlohy, které mají za cíl studentům přiblížit pojmy bit, byte, princip binární soustavy a procvičit zábavným způsobem základní práci s binárními čísly, aritmetické a booleovské operace. V druhé části se zaměřuje na reprezentaci černobílých obrázků v mřížce, které slouží jednak k procvičení binární soustavy, ale také k ilustraci pojmu pixel a reprezentace obrázků v počítači.

Návaznost na rámcový vzdělávací program pro gymnázia:

vzdělávací obsah: digitální technologie, učivo: hardware – funkce prostředků ICT, jejich částí a periférií, technologické inovace, **digitalizace a reprezentace dat**

Seznam námětů - binární soustava:

- Lidské počítadlo (přílohy `počítadlo`, `počítadlo_malé`)
- Počítání na prstech do 31: varianty A, B (příloha `prsty`)
- Kouzlo se čtverci (příloha `čtverce`)
- Kouzlo s paritou (příloha `parita`)
- Zakódovaná čísla (příloha `kódy`)
- Posílání tajné zprávy (příloha `zpráva`)
- Binární křížovky (příloha `křížovky`)
- Binární hry online
- Logické úlohy: ochutnávka vína, hádání čísla, legenda o šachovnici (příloha `logické`).

Seznam námětů - reprezentace obrázků:

- Bitmapa (příloha `bitmapa`)
- Mřížky (příloha `mřížky`)
- Kompresse (příloha `komprese`)

Seznam námětů - programátorské úlohy:

- Programátorské úlohy: binární hodiny (příloha `hodiny`), dekodér obrázků

Všechna zadání určena pro studenty jsou shrnuta a připravena k vytištění v materiálu `sbírka`.

Doporučený průběh:

- Intuitivní uvedení binární soustavy: aktivita [Lidské počítadlo](#) nebo [Počítání na prstech varianta A](#).
- Motivace, vysvětlení teorie binární soustavy, operací nad ní (slidy `binární_soustava`, `aritmetické_operace`, `booleovské_operace`).

- Procvičování: výběr ze zbývajících úloh z kategorie binární soustava (jsou seřazeny přibližně dle náročnosti).
- Procvičování binární soustavy na obrázcích: některé z příkladů [Bitmapa](#), [Mřížky](#).
- Navázáním tématu reprezentace obrázků v počítači: příklad [Kompresa](#).
- Vysvětlení základů teorie reprezentace obrázků (slidy [kódování obrázků](#)).
- Procvičení programování (viz [Programátorské úlohy: Binární hodiny](#), [Dekodér obrázků](#))

Lidské počítadlo

Typ: Interaktivní aktivita.

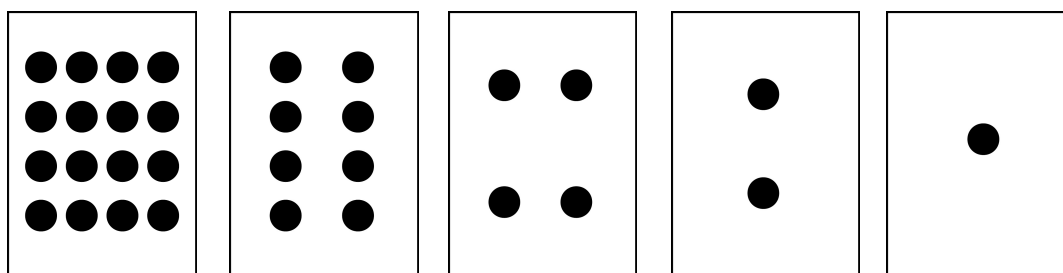
Předpoklady: Žádné.

Zaměření: Představení binární soustavy, základní pochopení převádění z desítkové na binární soustavu a naopak. Vysvětlení pojmu bit, byte. Vhodné na úvod.

Náročnost: Lehká, 20 minut, vhodné i pro mladší studenty.

Materiál: Pět velkých karet s puntíky (k tisku viz příloha *počítadlo*). Rub karet zůstává bílý.

Průběh: Vyvolejte pět dobrovolníků a každému z nich dejte jednu kartu, tak aby stáli seřazení od nejmenšího počtu puntíků po největší zleva doprava. Každá karta může být otočená buď lícem nebo rubem ke třídě tak, aby třída puntíky viděla, respektive neviděla.



Vyzvěte studenty, aby karty otočili tak, aby bylo vidět přesně 5 puntíků (*zůstanou karty s 1 a 4 puntíky, ostatní jsou směrem ke třídě otočeny prázdným rubem*). Pak zkuste například 11 ($8+2+1$), 18 ($16+2$), 27 ($16+8+2+1$) atd. Otázka: Jaké je nejmenší číslo, které lze vyrobit? (0) Jaké je největší? (31) Existuje více způsobů jak vyrobit jedno číslo? (Ne.)

Můžete také zkusit počítat postupně od 0 až do 31. V tuto chvíli je možné také vyměnit skupinku dobrovolníků. Otázka: Vidíte v počítání nějaký vzor? (Ano. Jednička se otočí pokaždé, dvojka jednou za dvě otočení jedničky, čtverka jednou za čtyři otočení jedničky, atd.)

Otázka: Co kdybychom chtěli tímto způsobem získat číslo větší než 31 - jaká by byla další karta? (32) A další? (64) A další? (128) A další? (256) Jaký je v tom systém? (Každé další číslo je dvojnásobkem předchozího.)

Nyní studentům vysvětlíte, že pokud mají karty otočené ke třídě lícem s puntíky, představují jedničku a pokud je mají otočený prázdný rub, představují nulu. Tomu se říká binární, neboli dvojkový systém, protože má jen dvě hodnoty. Binární číslíci se říká bit a každý student tedy představuje jeden bit. Když zapíšeme bity vedle sebe, dostaneme binární číslo. 8 bitů je byte. Otázka: kolik hodnot kódují dva bity? (4) Kolik hodnot kóduje našich pět bitů? (32) Kolik hodnot kóduje byte? (256)

Řekněte studentům, aby ukázali binární číslo 00111. Kolik je to v desítkové soustavě? (7 - *přesně tolik, kolik vidíme puntíků*). Kolik je ve dvojkové soustavě 14? (01110 - *nuly jsou tam, kde vidíme rub a jedničky tam, kde vidíme puntíky*). Zkuste další a další převody z binárního čísla na desítkové a naopak. Můžete opět prostřídat skupinku dobrovolníků, nebo i zapojit celou třídu rozdělenou do skupinek po pěti. Také můžete dát pět menších karet (k tisku viz příloha *počítadlo_malé*) každému studentovi a nechat je pracovat individuálně.

Zdroj: převzato z <http://csunplugged.org/binary-numbers>

Obměna: Místo karet s puntíky mohou studenti jen vstávat a sedat si - to je vhodné jako osvěžení a rychlá rozcvička. Celá aktivita se pak dá koncipovat jako soutěž po skupinkách.

Počítání na prstech do 31 - varianta A

Typ: Interaktivní aktivita.

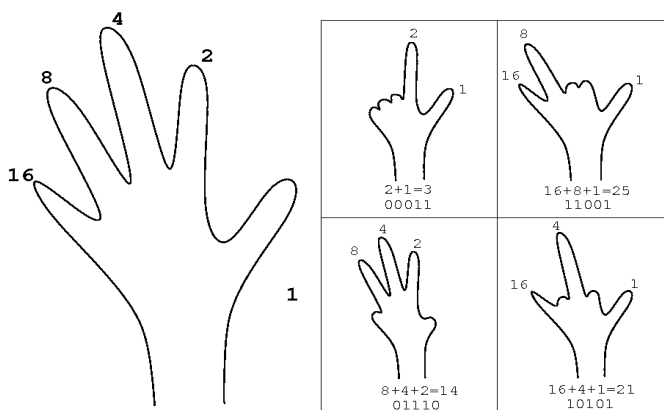
Předpoklady: Žádné.

Zaměření: Představení binární soustavy, základní pochopení převádění z desítkové na binární soustavu. Vysvětlení pojmu bit, byte. Vhodné na úvod.

Náročnost: Lehká, 15-20 minut.

Materiál: Pro každého studenta nápopěda - ruka s čísly (k tisku viz příloha prsty, na 1 listu obsahuje 2 kopie nápopědy), případně ještě malé samolepky k nalepení na jednotlivé prsty a popsání čísla 16,8,4,2,1.

Průběh: Rozdejte každému studentovi nápopědu. Když počítáme na prstech klasicky, každý prst znamená přidání jedné. Když chceme ukázat tři, zvedneme tři prsty. My si ukážeme, jak na prstech jedné ruky počítat do více než do pěti. Systém je jednoduchý - ruka ukazuje číslo, které je součtem čísel na jednotlivých prstech. Palec představuje přidání 1, ukazováček přidání 2, prostředník 4, prsteníček 8 a malíček 16.



Vyzvěte studenty, aby zvedli prsty tak, aby dohromady dávaly součet 6 (zvednou ukazováček a prostředník). Pak zkuste například 17 (16+1, tj. malíček a palec), 23 (16+4+2+1, tj. všechny kromě prsteníčku) atd. (Pozor na číslo 4). Otázka: Jaké je nejmenší číslo, které lze vyrobit? (0) Jaké je největší? (31) Existuje více způsobů jak vyrobit jedno číslo? (Ne.)

Můžete také zkusit počítat postupně od 0 až do 31. Otázka: Vidíte v počítání nějaký vzor? (Ano. Palec se střídá zvednutý a nezvednutý po jedné, ukazováček po dvou, prostředník po čtyřech, atd.)

Otázka: Co kdybychom chtěli tímto způsobem získat číslo větší než 31 do kolika bychom napočítali na šesti prstech? (64) Jakou hodnotu by představoval šestý prst? (32) Co na sedmi prstech? (128, prst má hodnotu 64) Do kolika umíte napočítat na deseti prstech? (není to 62, ale 1023) Co kdybyste ještě přidali prsty na nohou? (více než milion) Jaký je v tom systém? (Každé další číslo je dvojnásobkem předchozího.)

Nyní studentům vysvětlíte, že pokud mají zvednutý prst, představuje to jedničku a pokud prst zvednutý není, představuje to nulu. Tomu se říká binární, neboli dvojkový systém, protože má jen dvě hodnoty. Binární číslici se říká bit a každý prst tedy představuje jeden bit. Když zapíšeme bity vedle sebe, dostaneme binární číslo. 8 bitů je byte. Otázka: kolik hodnot kódují dva bity? (4) Kolik hodnot kóduje našich pět bitů? (32) Kolik hodnot kóduje byte? (256)

Řekněte studentům, aby ukázali binární číslo 00111. Kolik je to v desítkové soustavě? (7 - přesně součet hodnot na prstech). Kolik je ve dvojkové soustavě 14? (01110 - jedničky jsou tam, kde jsou zvednuté prsty). Zkoušejte další a další převody z binárního čísla na desítkové a naopak.

Rozšíření:

- Velice hezký comics, bohužel anglicky: <http://www.instructables.com/id/Binary-Counting/>
- Webová aplikace: <http://www.intuitor.com/counting/HandCounter.html>

Počítání na prstech do 31 - varianta B

Typ: Interaktivní aktivita.

Předpoklady: Základní znalost binární soustavy.

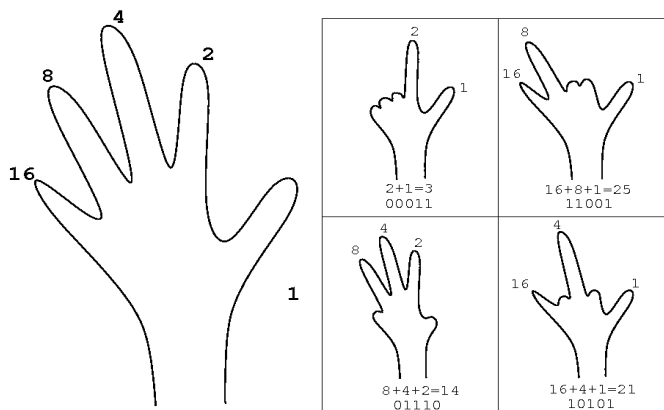
Zaměření: Procvičení převádění z desítkové na binární soustavu, z binární na desítkovou.

Náročnost: Lehká, 15 minut.

Materiál: Pro každého studenta nápopěda - ruka s čísly (k tisku viz příloha `prsty`, na 1 listu obsahuje nápopědu pro 2 studenty), případně ještě malé samolepky k nalepení na jednotlivé prsty a popsání čísla 16,8,4,2,1.

Průběh: Rozdejte každému studentovi nápopědu. Systém je jednoduchý - zvednutý prst znamená jedničku, nezvednutý nulu.

Nejprve ukazujte na svých prstech binární čísla a nechte studenty převádět je do desítkové soustavy. Poté procvičte převod na opačnou stranu: Řekněte číslo v desítkové soustavě. Úkolem studentů je ukázat jej na prstech v binární soustavě. Číslo 4 ale raději cenzurujte.



Až si budou studenti v převádění jistější, můžete zkusit totéž, ale bez nápopědy.

Otázka: Na pěti prstech umíte napočítat do 31, do kolika na 10? (*není to 62, ale 1023*) Co kdybyste ještě přidali prsty na nohou? (*více než milion*)

Rozšíření:

- Velice hezký comics, bohužel anglicky: <http://www.instructables.com/id/Binary-Counting/>
- Webová aplikace: <http://www.intuitor.com/counting/HandCounter.html>

Kouzlo se čtverci

Typ: Interaktivní aktivita.

Předpoklady: Znalost binárního zápisu čísel, převod z binární do desítkové soustavy.

Zaměření: Zlepšení pochopení principu binárního kódování čísel.

Náročnost: Střední, 15 minut

Materiál: Pět velkých čtverců s čísly (k tisku viz příloha čtverce), které se dají připnout na tabuli, nástěnku apod., tak aby je celá třída viděla.

Průběh: Pověste čtverce takto vedle sebe:

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

Budete s studenty hrát hru "mysli si číslo". Jejich úkolem je přijít na princip, podle kterého vždy číslo uhodnete. Nejprve vyzvěte jednoho studenta, aby si tajně vybral číslo od 0 do 31. Pak mu řekněte, aby vám ukázal přesně ty čtverce, na kterých se dané číslo vyskytuje. Ideální je, pokud se ukázané čtverce dají nějak označit, např. posunout na tabuli nahoru, dolů, podtrhnout, apod. Vzápětí mu prozradte jaké číslo si myslel. Celou hru opakujte od začátku s jinými studenty, dokud někdo nepřijde na princip. Ten vás pak může v hádání vystřídat. Po rozumné době nebo až si všichni studenti myslí, že princip znají, shrňte správné řešení.

Řešení: Čtverce vedle sebe představují pět pozic v binárním zápisu čísla. Číslo se na čtverci vyskytuje, pokud se na příslušném místě v jeho binárním zápisu vyskytuje jednička. Například číslo 1 se vyskytuje jen na posledním čtverci, protože jeho binární zápis je 00001. Nula se nevyskytuje nikde. Číslo 31 se naopak vyskytuje na všech čtvercích, protože jeho binárním zápisem je 11111. Číslo 13 má binární zápis 01101, a tak se objevuje na druhém, třetím a pátém čtverci. Jaktože ale šlo hádání tak rychle? První číslo na každém čtverci (tedy 16,8,4,2,1) jsou přesně ta čísla, která potřebujete při převodu z binárního zápisu, takže stačilo jednoduše sečíst první čísla na vybraných čtvercích.

Všimněte si, že na posledním čtverci se vyskytuje každé druhé číslo (tedy čísla lichá), na předposledním vždy dvě nejsou a následující dvě jsou a zase dvě chybí atd. Na třetím čtverci čtyři čísla chybí, následující čtyři čísla se objevují, další čtyři chybí atd. Podobně je to s druhým a prvním čtvercem - tam se čísla střídají po osmi, respektive po šestnácti. Tento vzorec není náhodný, když si pod sebe napíšeme v binárním zápisu čísla od 0 do 31, vidíme, že přesně tak se střídají jedničky a nuly ve sloupcích. Pokud jste dělali také cvičení "Lidské počítadlo", na tento princip už jste narazili, když jste se snažili počítat popořadě od 0 do 31.

Zdroj: převzato z http://www.mathmaniacs.org/lessons/01-binary/Magic_Trick

Alternativa: Tatáž hra se dá hrát online na internetu se čtverci velikosti 5 krát 5 a čísly od 1 do 60. Její zadání je ale bohužel anglicky: <http://gwydir.demon.co.uk/jo/numbers/binary/cards.htm>

Kouzlo s paritou

Typ: Interaktivní aktivita.

Předpoklady: Žádné, doporučená je znalost pojmů bit, byte.

Zaměření: Procvičení pojmu parita, demonstrace použití kontrolního součtu v počítači.

Náročnost: Střední, 15 minut

Materiál: Oboustranné čtverečky (k tisku viz příloha `parita`), z jedné strany potištěny jedničkou a z druhé nulou. Doporučujeme minimálně celkem 25 bílých kusů + 10 barevných, ideálně 64 bílých + 16 barevných kusů, ale je možné upravovat velikost úlohy prakticky libovolně (celkem $n \cdot n$ bílých kusů a $2n$ barevných). Případně nejsou potřeba žádné, jen tabule.

Průběh: Sestavte z bílých čtverečků na magnetickou tabuli čtverec velikosti 5 krát 5 n krát n. Jednotlivé čtverečky jsou otočeny náhodně. Poté si připravte dvě barevné řady nad a vpravo od čtverce. Ty jsou otočeny tak, že ukazují paritu příslušného sloupce resp. řádku. Studenti význam barevných číslic neznají.

1	0	1	1	0	
1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1

Otočte se k tabuli zády tak, abyste na ni neviděli a vyzvěte jednoho studenta, aby si vybral libovolný bílý čtvereček a otočil ho. Poté se otočte zpět k tabuli a podle parity odhalte řádek a sloupec, ve které se nachází změněné číslo. Ukažte, které číslo bylo otočeno a spravte paritu tak, aby odpovídala aktuálnímu stavu tabulky. Cílem studentů je přijít na princip podle kterého vždy snadno přijdete na to, které číslo bylo otočeno.

Po odhalení principu můžete diskutovat roli kontrolního paritního součtu při přenosu dat.

Zakódovaná čísla

Typ: Individuální cvičení, možné i jako domácí úkol.

Předpoklady: Znalost binárního zápisu čísel, převod z binární do desítkové soustavy.

Zaměření: Osvojení si jednoduchého převodu z binární soustavy do desítkové.

Náročnost: Lehká, 10 minut.

Materiál: Zadání pro každého studenta (k tisku viz příloha kódy, na 1 listu obsahuje 2 zadání úlohy).

Zadání: Rozkódujte do desítkové soustavy:

$$\text{př. } \text{♫} \text{♪} \text{♪} \text{♫} = 9$$

$$(\text{♫} = 1, \text{♪} = 0)$$

$$\spadesuit \clubsuit \spadesuit \clubsuit =$$

$$(\clubsuit = 1, \spadesuit = 0)$$

$$\text{☺} \text{☺} \text{☹} \text{☺} =$$

$$(\text{☺} = 1, \text{☹} = 0)$$

$$\text{☼} \text{☼} \text{×} \text{×} \text{☼} =$$

$$(\text{☼} = 1, \text{×} = 0)$$

$$\text{♀} \text{♂} \text{♂} \text{♀} \text{♀} =$$

$$(\text{♂} = 1, \text{♀} = 0)$$

$$\bullet \blacksquare \bullet \bullet \bullet \blacksquare =$$

$$(\bullet = 1, \blacksquare = 0)$$

$$\blacktriangledown \blacktriangle \blacktriangledown \blacktriangle \blacktriangledown \blacktriangle \blacktriangledown \blacktriangle =$$

$$(\blacktriangle = 1, \blacktriangledown = 0)$$

$$\text{\$} \text{\pounds} \text{\$} \text{\$} \text{\pounds} \text{\$} \text{\$} \text{\$} =$$

$$(\text{\$} = 1, \text{\pounds} = 0)$$

Řešení:

$$\text{♫} \text{♪} \text{♪} \text{♫} = 9$$

$$\text{☺} \text{☺} \text{☹} \text{☺} = 13$$

$$\text{♀} \text{♂} \text{♂} \text{♀} \text{♀} = 12$$

$$\blacktriangledown \blacktriangle \blacktriangledown \blacktriangle \blacktriangledown \blacktriangle \blacktriangledown \blacktriangle = 85$$

$$\spadesuit \clubsuit \spadesuit \clubsuit = 10$$

$$\text{☼} \text{☼} \text{×} \text{×} \text{☼} = 25$$

$$\bullet \blacksquare \bullet \bullet \bullet \blacksquare = 46$$

$$\text{\$} \text{\pounds} \text{\$} \text{\$} \text{\pounds} \text{\$} \text{\$} \text{\$} = 183$$

Posílání tajné zprávy

Typ: Individuální cvičení, možné i jako domácí úkol.

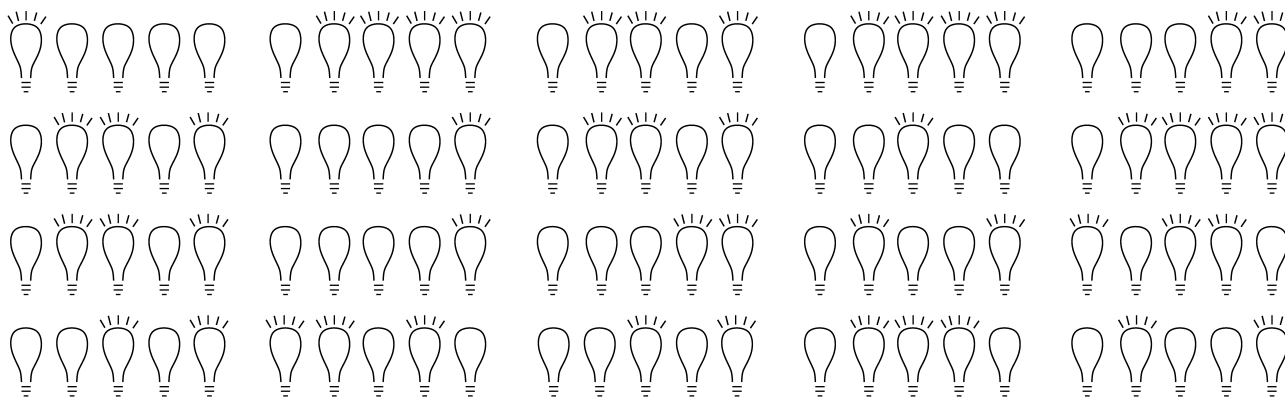
Předpoklady: Znalost binárního zápisu čísel, převod z binární do desítkové soustavy.

Zaměření: Osvojení si jednoduchého převodu z binární soustavy do desítkové. Uvědomění si, že pomocí binární soustavy lze kódovat nejen čísla.

Náročnost: Lehká, 10 minut.

Materiál: Zadání pro každého studenta (k tisku viz příloha zpráva, na 1 listu obsahuje 2 zadání úlohy).

Zadání: Adam a Kamil jsou nerozlučná dvojka, dokonce bydlí naproti sobě, vidí si do oken a mají vlastní tajný komunikační systém. On vlastně zase tak tajný není, jednoduše rozsvěcují a zhasínají světla a tak mezi sebou posílají binární kód. První písmeno Adamovy zprávy je P. Rozluštěte její zbytek?



Nápověda:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

Řešení: POMOC MAM DOMACI VEZENI

Rozšíření: Nechte studenty poslat si vzájemně šifrovanou zprávu. Mohou kódovat pomocí jedniček a nul, křížků a koleček, apod. Menší děti mohou například navlékat dvě barvy korálků na nit.

Binární křížovka

Typ: Individuální cvičení, možné i jako domácí úkol.

Předpoklady: Znalost binárního zápisu čísel, základní booleovské operace s binárními čísly: negace, XOR. Základní aritmetické operace s binárními čísly: sčítání, odčítání, násobení, dělení.

Zaměření: Manipulace s binárními čísly.

Náročnost: Vyrůstající od střední po těžkou, 1 cvičení 5-10 minut

Materiál: Zadání pro každého studenta (k tisku viz příloha křížovka, na 1 listu obsahuje 1 zadání úlohy).

Zadání: Vyluštěte křížovku (vyplňte jedničkami a nulami):

Malá nápověda: Všimněte si, že binární zápis sudého čísla vždy končí nulou a lichého jedničkou. Negace je operace, která ze všech jedniček vyrobí nuly a z nul jedničky, např. negace 01011 je 10100. Je-li první číslo negací druhého, pak také druhé je negací prvního. XOR je operace nad dvěma binárními čísly, která vyrobí číslo s jedničkami na pozicích, na kterých se dané čísla liší a naopak nuly na pozicích, na kterých se neliší, např. 11001 XOR 10101 = 01100, protože čísla 11001 a 10101 se liší pouze na druhé a třetí pozici. Podobně 010 XOR 101 = 111, 110 XOR 110 = 000, nebo 011 XOR 110 = 101.

př.	A	B	C	D
a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
c	1	0	1	0
d	0	1	0	0

Legenda:

- | | |
|----------------|---------------|
| a. liché číslo | A. sudé číslo |
| b. negace C | B. negace c |
| c. číslo 10 | C. $2*b$ |
| d. $2*A$ | D. negace a |

1.	A	B	C	D
a				
b				
c				
d				

Legenda:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a. $c \text{ XOR } d$ | A. číslo dělitelné 15 |
| b. $B \text{ XOR } C$ | B. $2*a$ |
| c. sudé číslo | C. $D+d$ |
| d. negace B | D. negace c |

2.	A	B	C	D
a				
b				
c				
d				

Legenda:

- | | |
|----------------------|-------------|
| a. $B*2$ | A. negace b |
| b. číslo dělitelné 3 | B. negace a |
| c. $(D-2)^2$ | C. $b*2$ |
| d. $c+C$ | D. $d-a$ |

Řešení:

1.	A	B	C	D
a	0	1	1	1
b	0	1	0	0
c	0	1	1	0
d	0	0	0	1

Legenda:

a. $c \text{ XOR } d$

b. $B \text{ XOR } C$

c. sudé číslo

d. negace B

A. číslo dělitelné 15

B. $2*a$

C. $D+d$

D. negace c

2.	A	B	C	D
a	1	0	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	0	1
d	1	1	0	1

Legenda:

a. $B*2$

b. číslo dělitelné 3

c. $(D-2)^2$

d. $c+C$

A. negace b

B. negace a

C. $b*2$

D. $d-a$

Další náměty: binární hry online

Typ: Individuální cvičení.

Zaměření: Dril na převod.

Náročnost: Lehká, časová náročnost libovolná.

1. http://forums.cisco.com/CertCom/game/binary_game_page.htm

Intuitivní hra, cílem je buď doplnit binární zápis čísla k desítkovému nebo naopak.

2. <http://sucs.org/~tobeeon/project/binary.html>

Hra s anglickými instrukcemi, ale intuitivní a pochopitelná i bez nich. Převádí se z binární soustavy do desítkové. Obtížnost easy je příliš lehká, obtížnost medium je přiměřená, obtížnost hard je bez nápovědy (není vidět 32,16,8,4,2,1).

3. <http://britton.disted.camosun.bc.ca/binary.swf>

Pěkná, vícekolová hra na co nejrychlejší převod z desítkové do dvojkové soustavy.

Logické hádanky

Typ: Logické hádanky k zamyšlení a následné diskuzi.

Předpoklady: Znalost binární soustavy, mocnin a logaritmů.

Zaměření: Procvičení logického myšlení. Méně tradiční užití binární soustavy. Ilustrace velikosti čísla vůči velikosti jeho binárního kódování.

Náročnost: Střední, 5-10 minut každá.

Materiál: Žádný, případně texty hádanek pro každého studenta nebo do dvojice (k tisku viz příloha logické, na 1 listu obsahuje 2 kopie zadání všech tří úloh).

Zadání:

1. Ochutnávka vína

Král chystá velkou oslavu a jedním z vrcholů má být ochutnávka exkluzivních vín. Tři hodiny před začátkem oslavy však královská tajná služba zjistila, že jeden z 8 sudů vína je otrávený, neví však, který to je. Jed je smrtící a účinkuje spolehlivě i v malém množství do dvou hodin. V královském vězení zrovna sedí 3 vězni odsouzení k smrti -- král tedy rozhodl, že je má královská tajná služba využít k ochutnání vín a přijít na to, který sud obsahuje otrávené víno. Jak to mají agenti královské tajné služby provést?

Sudy si očíslováme od 0 do 7. Číslo každého sudu se dá zapsat v binárním zápisu na třech bitech. Binární kód každého sudu nám prozradí, kterému vězni toto víno podat. Například číslo 5 je binárně 101, proto víno z něj dáme ochutnat prvnímu a třetímu vězni. Binární kódování je jednoznačné, a proto podle kombinace vězňů, kteří zemřeli, umíme zpětně určit číslo otráveného sudu. Například, zemřou-li druhý a třetí vězeň, zavinilo to víno s binárním kódem 011, které bylo podáno právě jim. Otrávený je tedy sud 011, tj. sud číslo 3.

Přesněji to agenti provedou tak, jak je znázorněno na tabulce vpravo. Jednička značí, že vězeň víno dostal, dvojka, že ne. Každý vězeň tak kóduje jeden bit binárního zápisu a dostane k ochutnání 4 vína.

číslo sudu	1. vězeň	2. vězeň	3. vězeň
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Otázka: Kolik otroků by potřebovali, pokud by byl otrávený jeden sud z 256? (8)

2. Hádání čísla

Myslím si přirozené číslo a vaším úkolem je toto číslo zjistit. Můžete se ptát pouze na otázky, na které lze odpovědět "ano" či "ne". Kolik nejméně otázek potřebujete, abyste zvládli odhalit libovolné číslo z intervalu 1 do 1000? Pokud máte k dispozici 20 otázek, z jak velkého intervalu mi dovolíte číslo vybrat, abyste si byli jistí, že jej odhalíte?

Oba úkoly zvažte pro dvě varianty kladení otázek. Při "průběžné formulaci otázek" položíte první otázku, pak se rozhodnete, jaká bude druhá otázka a tak dále. Při "předběžné formulaci otázek" musíte předtím, než se začnete ptát, sepsat všechny otázky a já vám pak dám na odpovědi na všechny současně.

Při verzi z průběžným kladením otázek je intuitivní (a současně optimální) metoda „půlení intervalů“. Pokud zjišťuji číslo od 1 do 1000, začnu otázkou „Je hledané číslo menší než 500?“. Dejme tomu, že ne, pak pokračuji otázkou „Je hledané číslo menší než 750?“. Takto potřebuji na zjištění čísla od 1 do N celkem $\log_2(N)$ otázek (dvojkový logaritmus), respektive pomocí M otázek zvládnou odhalit číslo od 1 do $2M$. Pro konkrétní hodnoty v zadání tedy: na čísla od 1 do 1000 potřebuji 10 otázek, pomocí 20 otázek zvládnou čísla od 1 do 1048576.

V případě s předběžnou formulací otázek můžeme dosáhnout stejných výkonů, jen si to musíme dobře rozmyslet. Při znalosti binárních čísel to však není obtížné: otázky na které se budeme ptát budou mít formu „Má hledané číslo v binárním zápisu na pozici i jedničku?“. Jde o stejný princip, jaký jsme použili při řešení úlohy s otráveným vínem.

3. Legenda o šachovnici

Sultán se chtěl odvděčit vezírovi, který mu po dlouhá léta dobře radil. Nabídl mu, ať si vybere, co jen chce, že mu vše splní. Vezír se zamyslel a řekl, že chce jen šachovnici a jedno zrnko rýže na její první políčko. Každý další den pak chce na další políčko dvakrát více rýže než dostal předchozí den. Sultán se zasmál a slíbil, že to může splnit. První den se sultán vezírovi docela smál, stejně jako druhý a třetí. Prohloupil vezír doopravdy? Kolik zrnků nakonec bude mít? Tipněte si!

Vezír neprohloupil, zrnka na jeho šachovnici narůstají exponenciální rychlostí. Druhý den dostane 2 zrnka (dohromady bude mít 3), třetí den 4 (dohromady bude mít 7), čtvrtý 8 (dohromady 15), desátý 512 (dohromady 1023), dvacátý už asi 524 tisíc (dohromady asi 1 milion), čtyřicátý to bude přibližně 549 miliard (dohromady asi 1 bilion) a čtyřiašedesátý den dostane 9 223 372 036 854 775 808 zrnků, tj. asi 9 trilionů (dohromady to bude více než 18 trilionů zrnků). Takové množství rýže by pokrylo celou plochu Země několikacentimetrovou vrstvou!

Bitmapa

Typ: Logická, šifrovací úloha, k samostatnému řešení a případné následné diskuzi.

Předpoklady: Základní znalost binární soustavy.

Zaměření: Přiblížení pojmu pixel, bitmapa. Procvičení logického myšlení.

Náročnost: 1. lehká, 2. střední, 3. střední, 5-10 minut každá.

Materiál: Čtverečkový papír a zadání pro každého studenta (k tisku viz příloha bitmapa, 1 list obsahuje 6 kopií zadání)

Zadání: Rozšifrujte obrázek do čtvercové mřížky:

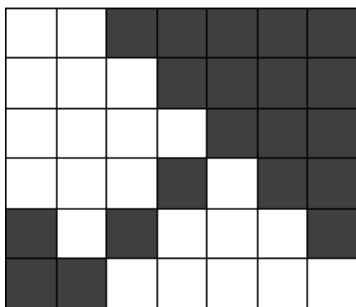
1. 0011111 0001111 0000111 0001011 1010001 1100000

2. 1010010001111001010100100010100101100101000110100100110

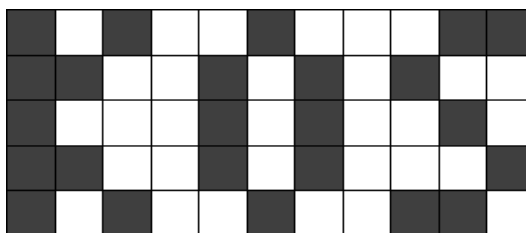
3. 31, 5, 2, 0, 14, 17, 14, 0, 18, 21, 9, 0, 1, 31, 1, 0, 31, 21, 17, 0, 31, 16, 16

Řešení: První úloha je opravdu jednoduchá - číslice jsou seskupena po sedmi, stačí tedy vzít mřížku velikosti 7x6 a vybarvit pole označená jedničkami. Druhá úloha už vyžaduje správné určení velikosti mřížky. Číslic v řadě je ale 55, což navádí na mřížku velikosti 5x11 nebo 11x5. Ve třetí úloze je každé číslo potřeba převést do jeho pětibitového zápisu. Ten pak reprezentuje jeden sloupec v mřížce velikosti 5x23.

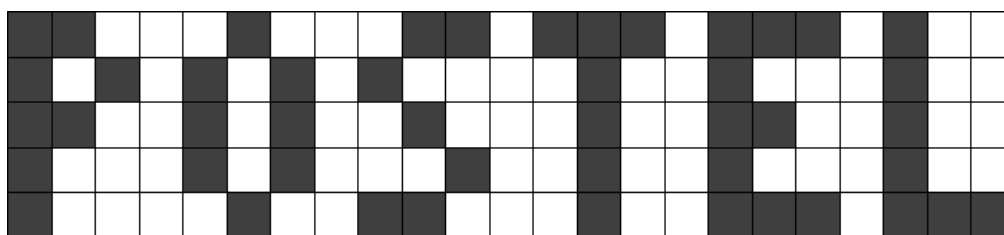
1.



2.



3.



Mřížky

Typ: Logická, šifrovací úloha, k samostatnému řešení a případné následné diskuzi.

Předpoklady: Základní znalost binární soustavy, operací AND, OR, XOR.

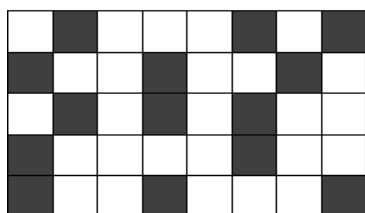
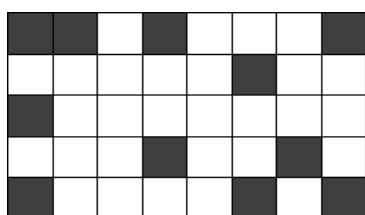
Zaměření: Přiblížení pojmu pixel, bitmapa. Procvičení booleovských operací, procvičení logického myšlení.

Náročnost: Střední, 5-10 minut každá.

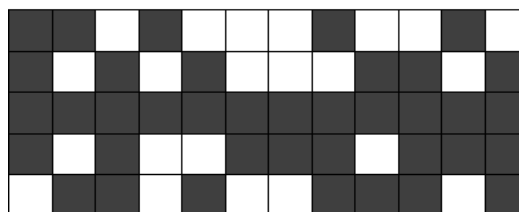
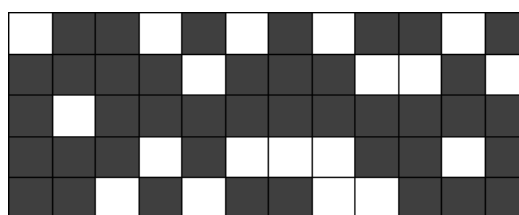
Materiál: Čtverečkový papír, zadání pro každého studenta (k tisku viz příloha mřížky, 1 list obsahuje 2 kopie zadání).

Zadání: Rozšiřujte obrázek:

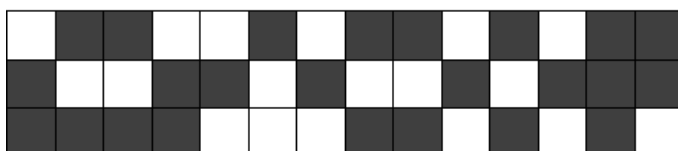
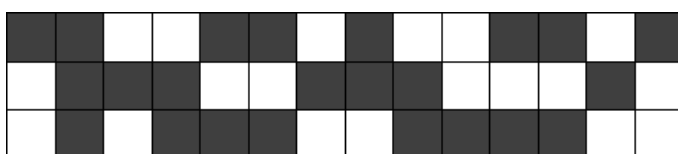
1.



2.

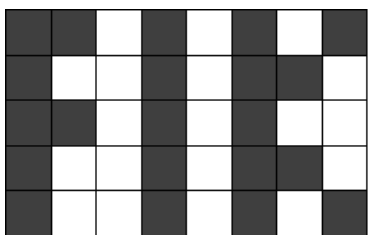


3.

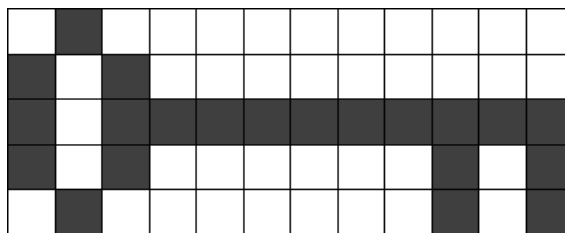


Řešení: Šifra je zadána jako dva obrázky s černými a bílými poli. Zkusíme tedy tyto dva obrázky nějak vhodně spojit. Bílé pole budou představovat nuly a černé jedničky. Budeme skládat mřížky pole po poli. U prvního zadání stačí dvě mřížky vystřihnout, překrýt je přes sebe a podívat se proti světlu (operace OR). U druhého zadání zafunguje operace AND a u třetího XOR. Můžeme si všimnout, že tomu odpovídá i jak obrázky vypadají - u prvního zadání je výskyt černých polí poměrně řídký, u druhého naopak velmi hustý a u třetího je to tak půl na půl.

1.



2.



3.



Komprese

Typ: Logická, šifrovací úloha, k samostatnému řešení a případné následné diskuzi.

Předpoklady: Žádné.

Zaměření: Ilustrace kódování a komprese obrázku v počítači. Procvičení logického myšlení.

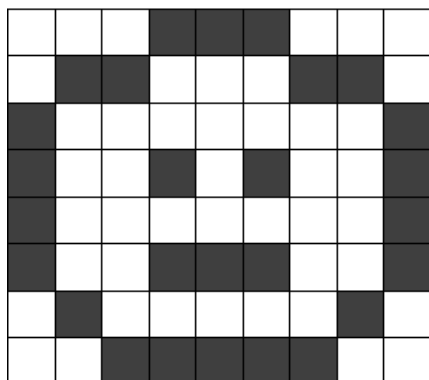
Náročnost: Střední, 10 minut.

Materiál: Čtverečkový papír, zadání pro každého studenta (k tisku viz příloha komprese, 1 list obsahuje 2 kopie zadání).

Zadání: 1. Rozšifrujte obrázek do čtvercové mřížky:

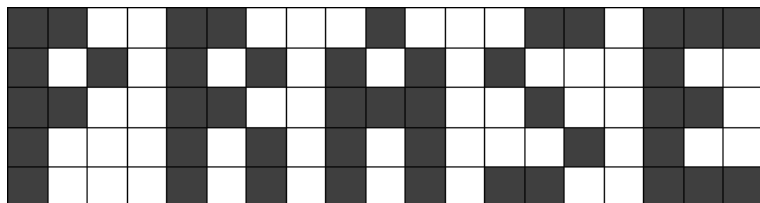
2, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 1, 3
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 2
2, 2, 2, 2, 3, 2, 1, 2, 2, 1
1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 2
1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3

2. Až budete znát princip kódování, zkuste naopak napsat kód pro tento obrázek:



Řešení: Každý řádek reprezentuje jeden řádek obrázku. Čísla na řádku postupně udávají, kolik následuje v řadě stejnobarevných políček. Tedy na prvním řádku napřed dvě černé, pak dvě bílé, dvě černé, tři bílé atd.

1.



2.

3, 3, 3
1, 2, 3, 2, 1
1, 7, 1
1, 2, 1, 1, 1, 2, 1
1, 7, 1
1, 2, 3, 2, 1
1, 1, 5, 1, 1
2, 5, 2

Programátorské úlohy

Typ: Programátorské úlohy k procvičení programování a zároveň binární soustavy.

Předpoklady: Znalost binární soustavy.

Zaměření: Procvičení programování a binární soustavy.

Náročnost: Střední, cca 45 minut každá.

Materiál: Žádný, případně text zadání pro studenty.

1. Binární hodiny

Předpoklady: Práce s časem.

Zadání: Nejprve studentům vysvětlete princip binárních hodin. Zadáním je naprogramovat jednoduché tikající binární hodiny, stačí v textovém módu například se znaky o pro 0 a x pro 1.

2. Dekodér obrázků

Doporučení: Uvést po příkladu [Komprese](#).

Zadání: Nejprve studentům vysvětlete princip komprese obrázků (viz. slidy [kódování_obrázků](#)). Zadáním je vytvořit program, jehož vstupem jsou sekvence čísel. Výstupem je nakreslený obrázek, stačí v textovém módu například se znakem x a mezerou.

Varianty: Úlohu je také možno formulovat jako Kodér/Dekodér obrázků. Totéž zadání lze použít také s příklady [Mřížky](#) a [Bitmapa](#). Popřípadě je možno zadat volně a výběr typu kódování nechat na studentech.