

Modelování komplexních sítí

Radek Pelánek

O přednášce

- další typ aplikace modelování a simulace
 - modelujeme nejen konkrétní systémy, ale i **obecný** jev
 - vlastnosti společné mnoha systémů
 - další stupeň abstrakce
 - ilustrace obecných principů komplexních systémů (např. mocninný zákon)
 - ukázky aplikací simulace

Komplexní sítě

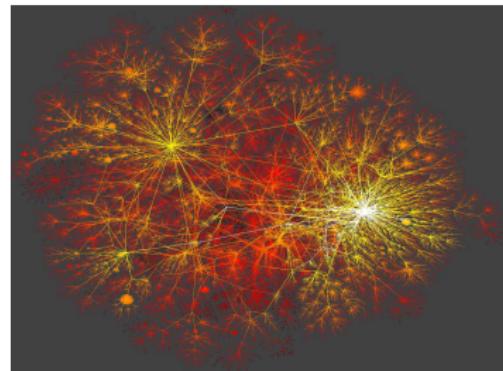
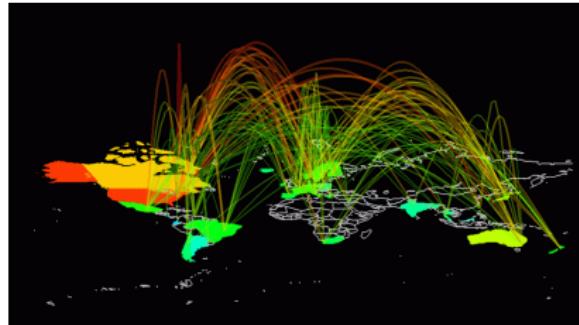
- **komplexní síť** (např. sociální sítě, regulační sítě exprese genů, Internet) = rozsáhlý graf
 - **společné vlastnosti** – např. vzdálenosti, stupně vrcholů
 - **abstraktní modely** (vesměs výpočetní)

Historické poznámky

- do 90. let: modelem náhodné grafy
 - druhá polovina 90. let: dostatek sítí v elektronické podobě, možnost jejich počítačové analýzy
 - konec 90. let: první modely komplexních sítí
 - knihy:
 - Linked (V pavučině sítí), A-L Barabási, 2002
 - Small Worlds, Six degrees, D Watts, 2003

Internet

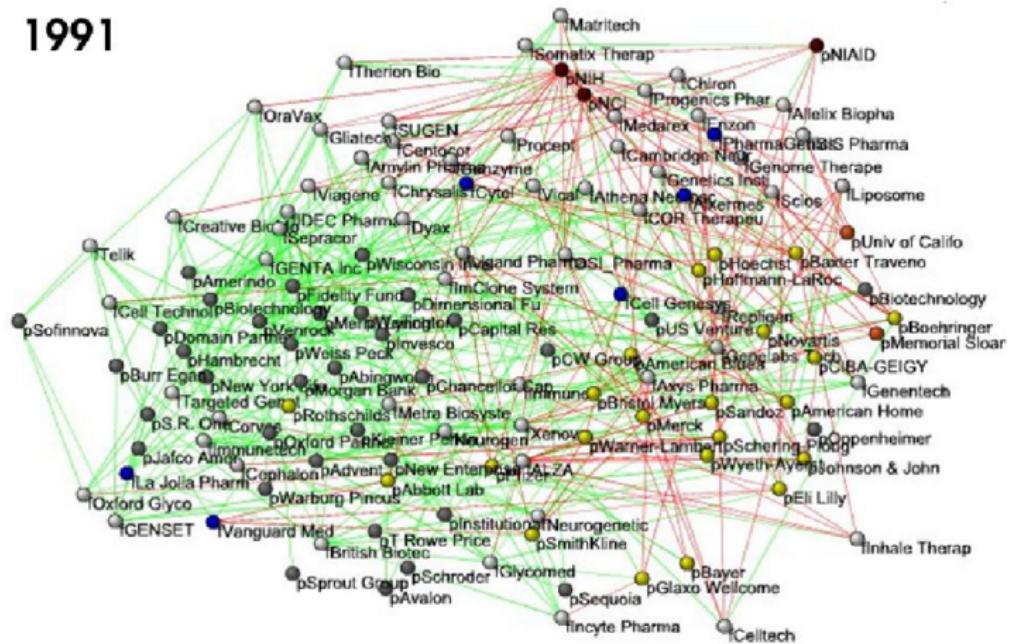
uzly: servery, hrany: dráty



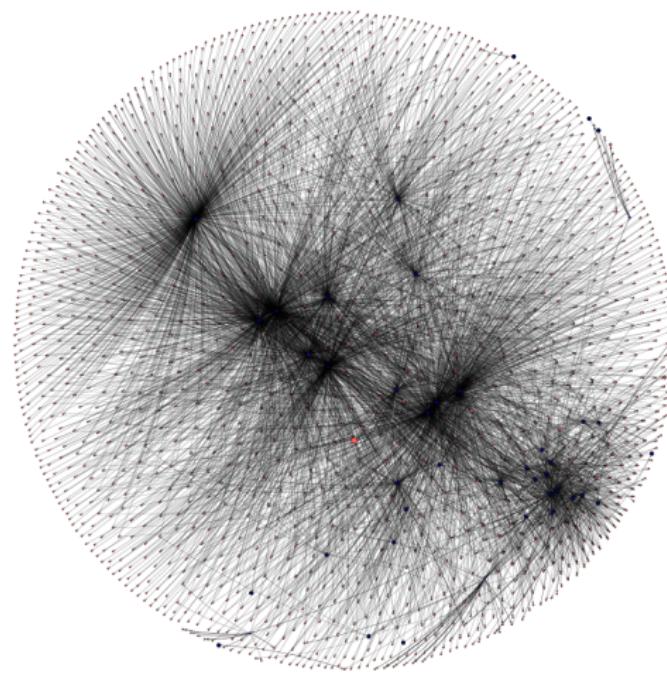
Firmy

uzly: firmy, hrany: obchodují spolu, sdílejí šéfy, ...

1991



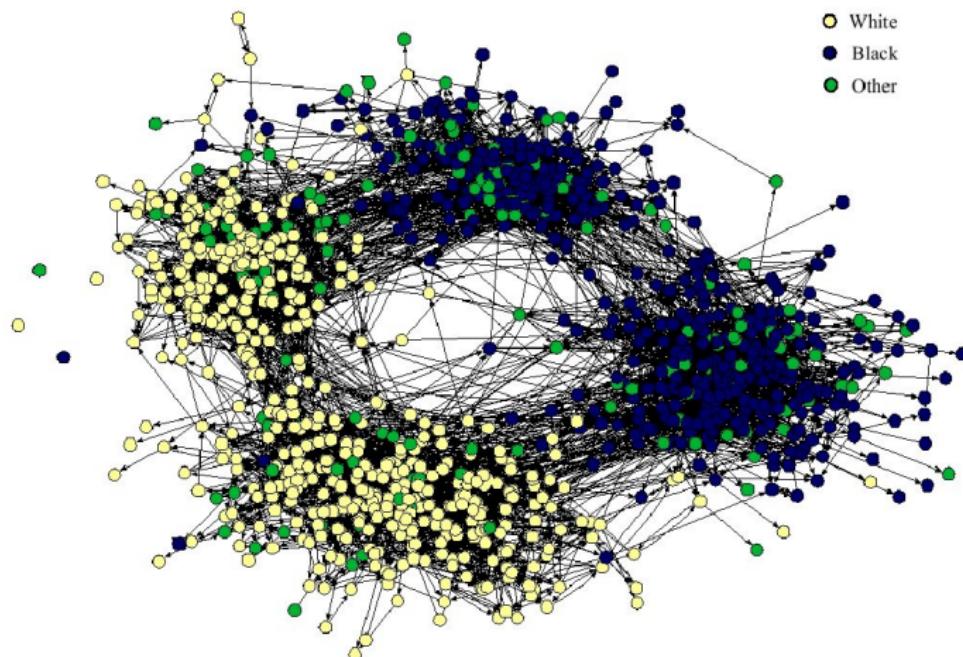
Firmy



<http://j-node.blogspot.cz/2011/10/network-of-global-corporate-control.html>

Sociální síť

uzly: lidé, hrany: známost

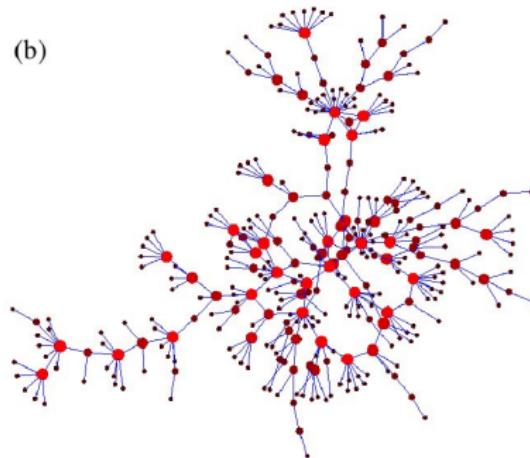




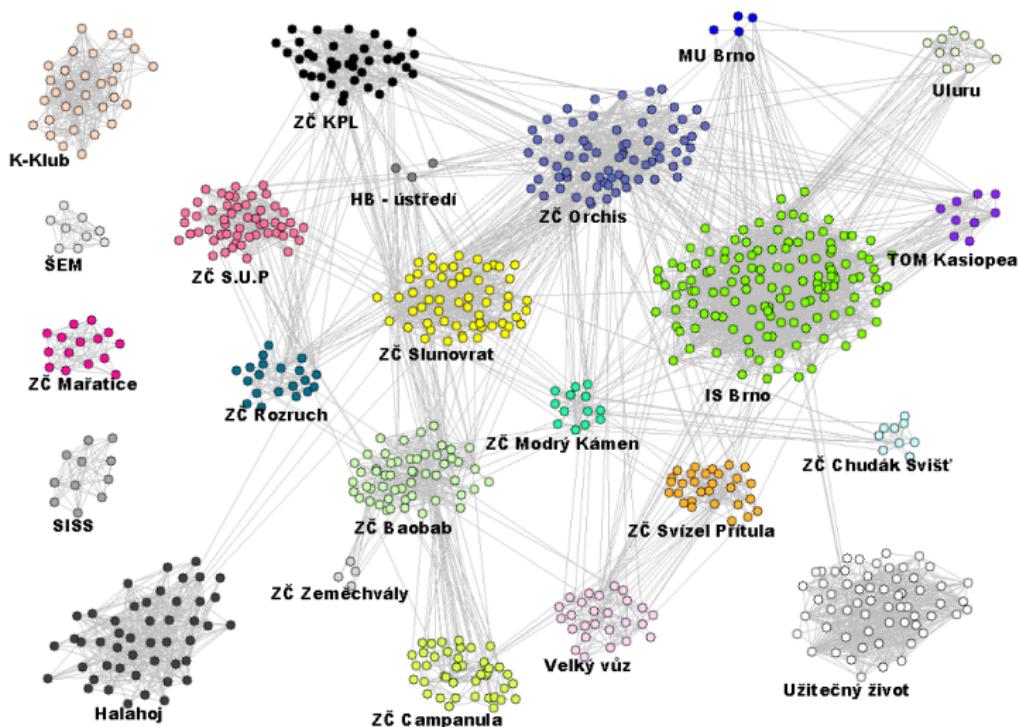
Síť sexuálních vztahů

uzly: lidé, hrany: sexuální styk

(b)

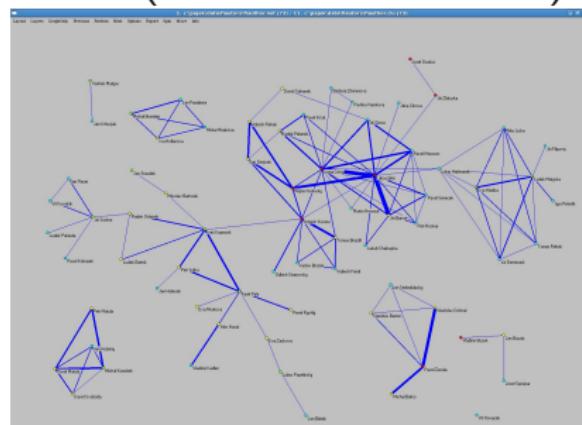
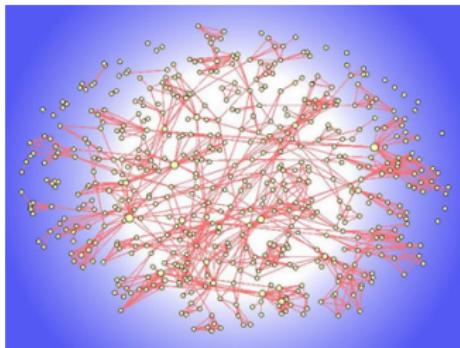


Spolupráce organizátorů volnočasových akcí



Vědecká spolupráce

uzly: vědci, hrany: spoluautorství (viz též Erdős number)



Buněčná biologie

uzly: proteiny, (příp. další látky), hrany: reagují spolu

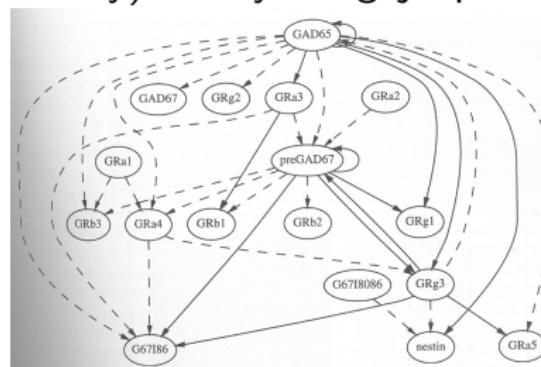
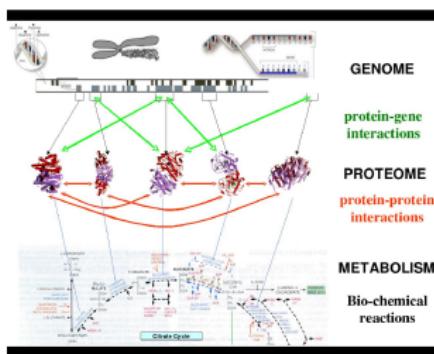
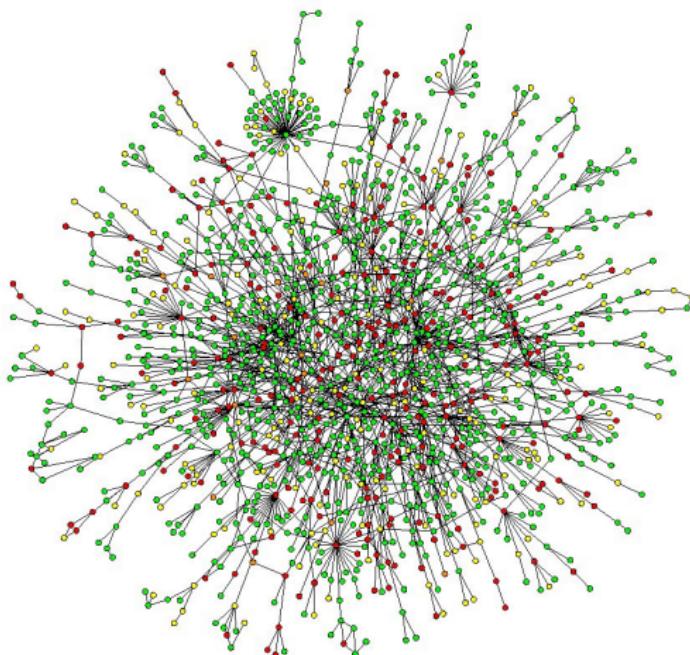


Figure 5

Gene interaction diagram for the GABA signaling family inferred from developmental gene expression data (spinal cord and hippocampus data). Solid lines correspond to positive interactions, broken lines suggest inhibitory relationships (Dhaeseleer et al. 1999).



Potravní řetězce

uzly: zvířata, hrany: pokud jedno žere druhé

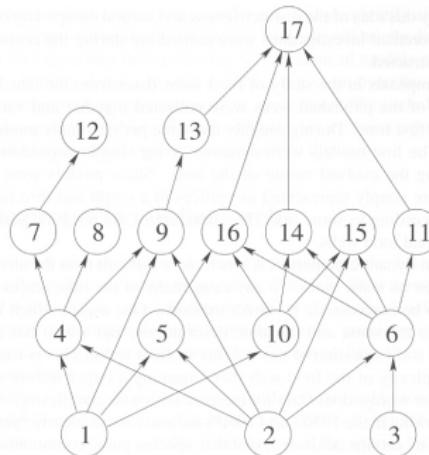
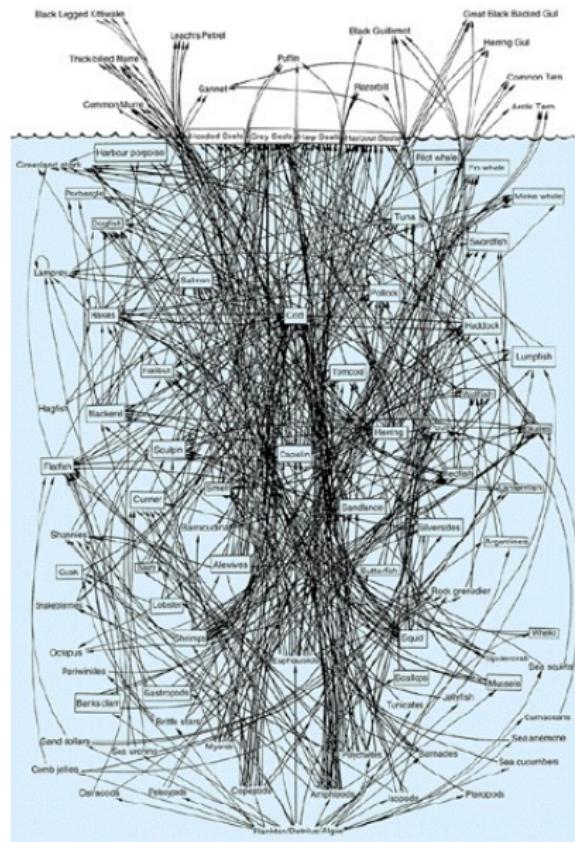


Figure 10.1: Narragansett Bay food web. 1=flagellates, diatoms; 2=particulate detritus; 3=macroalgae, eelgrass; 4=Acartia, other copepods; 5=sponges, clams; 6=benthic macrofauna; 7=ctenophores; 8=meroplankton, fish larvae; 9=pacific menhaden; 10=bivalves; 11=crabs, lobsters; 12=flounder; 13=striped bass, bluefish, mackerel; 14=demersal species; 15=starfish; 16=flounder; 17=man. (After Yodzis 1989. *Introduction to theoretical ecology*, Harper and Row, New York.)



Příklady komplexních sítí – přehled

oblast	uzly	hrany
Web	stránky	odkazy
internet	servery	dráty
elektrické sítě	transformátory	dráty
telefonní hovory	telefony	volání
vědecká spolupráce	vědci	spoluautorství
síť herců	herci	hráli v jednom filmu
síť sexuálních kontaktů	lidé	sex
citační sítě	vědecké články	citace
potravní řetězce	druhy zvířat	vztah lovec-kořist
metabolismus	chemické látky	reakce
neuronové sítě	neurony	synaptické spojení
lingvistika	slova	konotace, synonyma

Grafy

- graf $G = (V, E)$
- V je množina uzlů (vrcholů)
- E je množina hran
 - orientované hrany: $E \subseteq V \times V$
 - neorientované hrany: $E \subseteq \binom{V}{2}$

Grafy: základní pojmy

- cesty, vzdálenosti
 - stupeň vrcholu d_v = počet hran z vrcholu v vycházejících
(u orientovaných grafů rozlišujeme výstupní stupeň a vstupní stupeň)
 - distribuce stupňů $P(k)$ – pravděpodobnost, že náhodně vybraný uzel má stupeň k

Typické vlastnosti komplexních sítí

- **malé vzdálenosti** (vlastnost malého světa, small world phenomenon)
- **shlukování** (clustering)
- **bezškálovitost** (scale-free)
- „motivy“

Malý svět

„malý svět“ ~ potkáte cizího člověka a po chvíli zjistíte, že máte společné známé

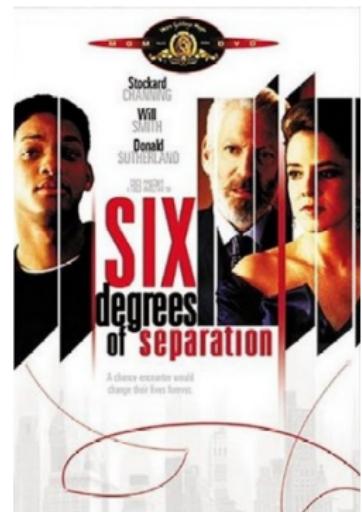
průměrné **nejkratší vzdálenosti** mezi uzly v komplexních sítích jsou „malé“

Milgramův experiment

- Stanley Milgram, 1967
- 60 balíčků, z Kansasu do Massachusetts
- balíčky povoleno posílat jen známým osobám
(známost na úrovni křestního jména ~ tykání)
- identifikace adresáta: jméno, zaměstnání, přibližné místo bydliště
- cíl: co nejrychleji k adresátovi

Šest stupňů odloučení

- balíčky, které došly, přišly průměrně na **šest** kroků
- experiment měl poměrně dost vad, ale i tak se výsledek zprofanovaval (a teprve později potvrdil)
- „šest stupňů odloučení“
- pozn. též divadelní hra, film
- viz též Erdős number, Bacon number



Shlukování

- lidé mají tendenci tvořit shluky
 - znám Pepu a Frantu \Rightarrow je pravděpodobné, že Pepa zná Frantu
 - nejen sociální sítě

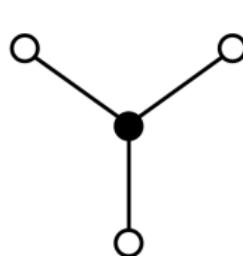
Shlukování formálněji

- uzel v má k_v sousedů
- e_v = počet vzájemně propojených sousedů
- koeficient shlukování:

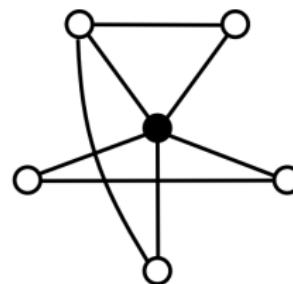
$$C_v = \frac{e_v}{\binom{k_v}{2}} = \frac{2e_v}{k_v(k_v - 1)}$$

Koeficient shlukování: příklad

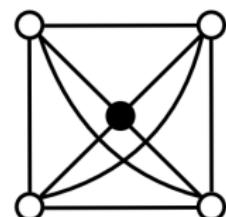
koeficient
shlukování
uzlu ●



$$0/3 = 0$$



$$3/10 = 0,3$$



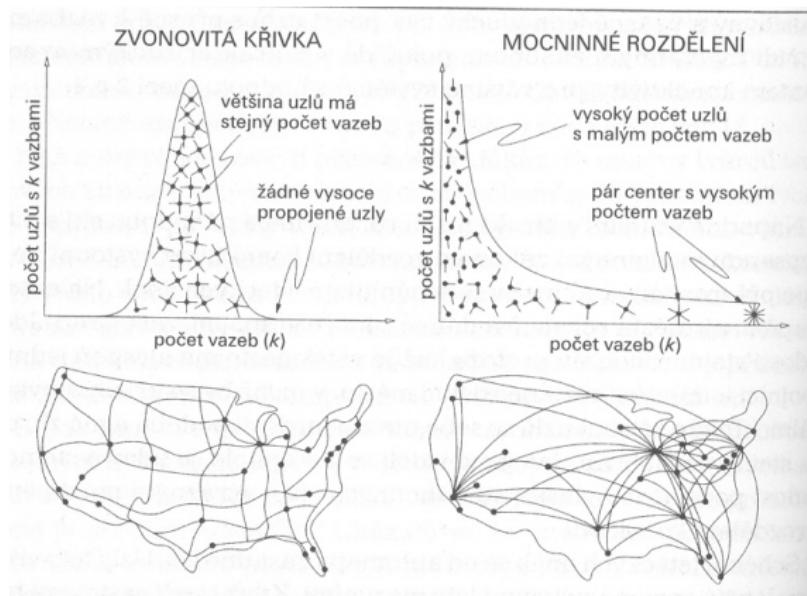
$$6/6 = 1$$

Distribuce stupňů

Existuje typická hodnota, kolem které se stupeň uzelů pohybuje („škála grafu“)?

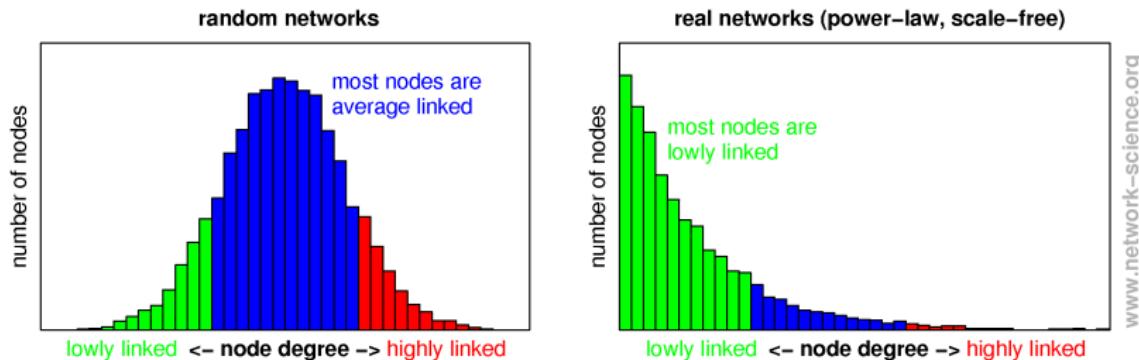
- náhodné grafy \Rightarrow ano
- komplexní sítě \Rightarrow ne

Poisson a mocninný zákon: příklad



A.-L. Barabási: V pavučině sítí

„Typické“ uzly



Distribuce stupňů formálněji

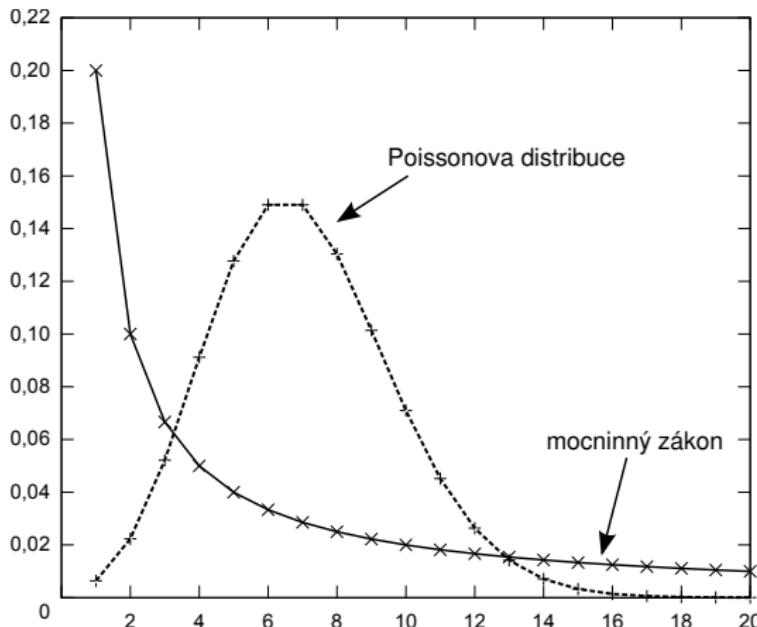
- Poissonova distribuce (pro velké $\lambda \sim$ normální distribuce)

$$P(n) = \lambda^n e^{-\lambda} / n!$$

- Mocninný zákon

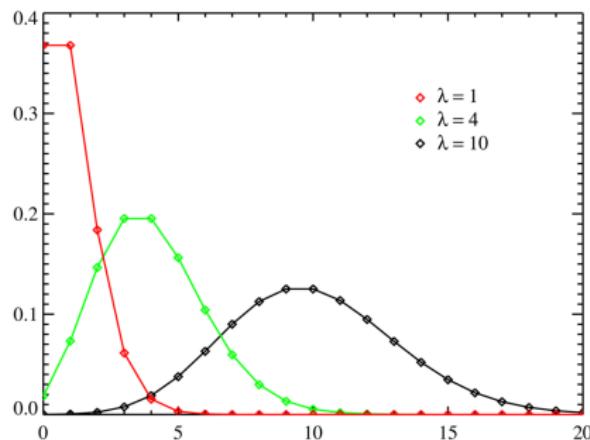
$$P(n) \sim n^{-\gamma}$$

Poissonova distribuce, mocninný zákon

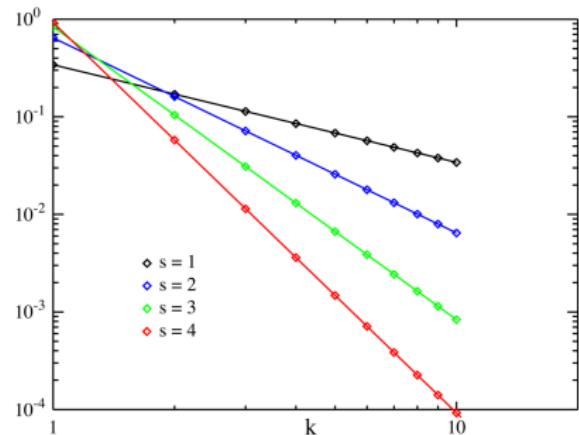


Poissonova distribuce, mocninný zákon

Poissonova distribuce



mocninný zákon



Příklady mocninného zákona

- rozdělení bohatství (Paretův princip)
- velikost meteoritů, záplav, požárů, zemětřesení, ...
- frekvence použití písmen, slov v jazyce; noty v hudebních skladbách
- jména v populaci
- velikost měst
- management: zákon 80-20 (produkce – zaměstnanci, rozhodnutí – čas porady)

Mocninný zákon často souvisí s přítomností pozitivních zpětných vazeb. Dokážete je pojmenovat?

Příklad: Hamlet

The, 1101; And, 898; To, 726; Of, 657; I, 561; You, 544; My, 508; A, 498; In, 414; It, 414; That, 389; Is, 334; Not, 315; This, 296; His, 292; But, 265; With, 257; For, 247; Your, 242; Me, 235; As, 228; Be, 226; Lord, 218; He, 216; What, 203; So, 197; Him, 189; Have, 179; Will, 169; Do, 150; No, 143; We, 140; Are, 131; On, 125; O, 121; Our, 119; By, 116; Shall, 114; If, 113; Or, 112; All, 110; Good, 109; Come, 104; Thou, 103; Now, 97; From, 95; More, 95; They, 95; Let, 94; How, 88; Thy, 87; Her, 86; At, 84; Was, 83; Most, 82; Like, 80; Would, 80; Hamlet, 78; Well, 78; There, 76; Know, 74; Sir, 74; Them, 74; May, 71; Tis, 71; Go, 70; Us, 69; King, 67; Love, 66; Did, 65; Very, 64; Speak, 63; Which, 63; Hath, 62; Then, 62; Why, 62; Must, 61; Thee, 59; Give, 58; Should, 58; An, 57;

Mocninný zákon v komplexních sítích

komplexní sítě: pár hodně propojených uzelů, většina uzelů má malé propojení

- webové stránky
- citační sítě
- sociální sítě

bezškálovitost (scale-free) – neexistuje typická hodnota (škála)

Distribuce stupňů

Vlastnosti sítí – výzkum

	network	type	n	m	z	ℓ	α	$C^{(1)}$	$C^{(2)}$	r	Ref(s.).
social	film actors	undirected	449 913	25 516 482	113.43	3.48	2.3	0.20	0.78	0.208	20, 416
	company directors	undirected	7 673	55 392	14.44	4.60	–	0.59	0.88	0.276	105, 323
	math coauthorship	undirected	253 339	496 489	3.92	7.57	–	0.15	0.34	0.120	107, 182
	physics coauthorship	undirected	52 909	245 300	9.27	6.19	–	0.45	0.56	0.363	311, 313
	biology coauthorship	undirected	1 520 251	11 803 064	15.53	4.92	–	0.088	0.60	0.127	311, 313
	telephone call graph	undirected	47 000 000	80 000 000	3.16	–	2.1	–	–	–	8, 9
	email messages	directed	59 912	86 300	1.44	4.95	1.5/2.0	–	0.16	–	136
	email address books	directed	16 881	57 029	3.38	5.22	–	0.17	0.13	0.092	321
	student relationships	undirected	573	477	1.66	16.01	–	0.005	0.001	–0.029	45
	sexual contacts	undirected	2 810	–	–	–	3.2	–	–	–	265, 266
information	WWW nd.edu	directed	269 504	1 497 135	5.55	11.27	2.1/2.4	0.11	0.29	–0.067	14, 34
	WWW Altavista	directed	203 549 046	2 130 000 000	10.46	16.18	2.1/2.7	–	–	–	74
	citation network	directed	783 339	6 716 198	8.57	–	3.0/–	–	–	–	351
	Roget's Thesaurus	directed	1 022	5 103	4.99	4.87	–	0.13	0.15	0.157	244
	word co-occurrence	undirected	460 902	17 000 000	70.13	–	2.7	–	0.44	–	119, 157
technological	Internet	undirected	10 697	31 992	5.98	3.31	2.5	0.035	0.39	–0.189	86, 148
	power grid	undirected	4 941	6 594	2.67	18.99	–	0.10	0.080	–0.003	416
	train routes	undirected	587	19 603	66.79	2.16	–	–	0.69	–0.033	366
	software packages	directed	1 439	1 723	1.20	2.42	1.6/1.4	0.070	0.082	–0.016	318
	software classes	directed	1 377	2 213	1.61	1.51	–	0.033	0.012	–0.119	395
	electronic circuits	undirected	24 097	53 248	4.34	11.05	3.0	0.010	0.030	–0.154	155
	peer-to-peer network	undirected	880	1 296	1.47	4.28	2.1	0.012	0.011	–0.366	6, 354
biological	metabolic network	undirected	765	3 686	9.64	2.56	2.2	0.090	0.67	–0.240	214
	protein interactions	undirected	2 115	2 240	2.12	6.80	2.4	0.072	0.071	–0.156	212
	marine food web	directed	135	598	4.43	2.05	–	0.16	0.23	–0.263	204
	freshwater food web	directed	92	997	10.84	1.90	–	0.20	0.087	–0.326	272
	neural network	directed	307	2 359	7.68	3.97	–	0.18	0.28	–0.226	416, 421



Assortativity

korelace r mezi stupni vrcholů

	network	n	r
real-world networks	physics coauthorship ^a	52 909	0.363
	biology coauthorship ^a	1 520 251	0.127
	mathematics coauthorship ^b	253 339	0.120
	film actor collaborations ^c	449 913	0.208
	company directors ^d	7 673	0.276
	Internet ^e	10 697	-0.189
	World-Wide Web ^f	269 504	-0.065
	protein interactions ^g	2 115	-0.156
	neural network ^h	307	-0.163
	food web ⁱ	92	-0.276
models	random graph ^u		0
	Callaway <i>et al.</i> ^v		$\delta/(1 + 2\delta)$
	Barabási and Albert ^w		0

Motivy

- podgrafy vyskytující se daleko častěji než v náhodném grafu
 - různé motivy pro různé typy sítí
 - většina komplexních sítí má nějaké motivy

Další vlastnosti

Network	Nodes	Edges	N_{real}	$N_{\text{rand}} \pm \text{SD}$	Z score	N_{real}	$N_{\text{rand}} \pm \text{SD}$	Z score	N_{real}	$N_{\text{rand}} \pm \text{SD}$	Z score	
Gene regulation (transcription)					Feed-forward loop			Bi-fan				
<i>E. coli</i>	424	519	40	7 ± 3	10	203	47 ± 12	13				
<i>S. cerevisiae</i> *	685	1,052	70	11 ± 4	14	1812	300 ± 40	41				
Neurons					Feed-forward loop			Bi-fan				
<i>C. elegans</i> †	252	509	125	90 ± 10	3.7	127	55 ± 13	5.3	227	35 ± 10	20	
Food webs					Three chain			Bi-parallel				
Little Rock	92	984	3219	3120 ± 50	2.1	7295	2220 ± 210	25				
Ythan	83	391	1182	1020 ± 20	7.2	1357	230 ± 50	23				
St. Martin	42	205	469	450 ± 10	NS	382	130 ± 20	12				
Chesapeake	31	67	80	82 ± 4	NS	26	5 ± 2	8				
Couchella	29	243	279	235 ± 12	3.6	181	80 ± 20	5				
Skiptwith	25	189	184	150 ± 7	5.5	397	80 ± 25	13				
B. Brock	25	104	181	130 ± 7	7.4	267	30 ± 7	32				
Electronic circuits (forward logic chips)					Feed-forward loop			Bi-fan				
s15850	10,383	14,240	424	2 ± 2	285	1040	1 ± 1	1200	480	2 ± 1	335	
s38584	20,717	34,204	413	10 ± 3	120	1739	6 ± 2	800	711	9 ± 2	320	
s38417	23,843	33,661	612	3 ± 2	400	2404	1 ± 1	2550	531	2 ± 2	340	
s9234	5,844	8,197	22	2 ± 1	140	754	1 ± 1	1050	209	1 ± 1	200	
s13207	8,651	11,831	403	2 ± 1	225	4445	1 ± 1	4950	264	2 ± 1	200	
Electronic circuits (digital fractional multipliers)					Three-node feedback loop			Bi-fan				
s208	122	189	10	1 ± 1	9	4	1 ± 1	3.8	5	1 ± 1	5	
s420	252	399	20	1 ± 1	18	10	1 ± 1	10	11	1 ± 1	11	
s838‡	512	819	40	1 ± 1	38	22	1 ± 1	20	23	1 ± 1	25	
World Wide Web					Feedback with two mutual dyads			Fully connected triad				
nd.edu§	325,729	1,466e6	1.1e5	2e3 ± 1e2	800	6.8e6	5e4 ± 4e2	15,000	1.2e6	1e4 ± 2e2	5000	Uplinked mutual dyad

Váhy hran

hrany různě důležité

váhy hran:

- internet: množství přenesených dat mezi počítači
- sociální sítě: četnost sociálních kontaktů
- proteiny: frekvence reakcí

váhy hran mají také distribuci podle mocninného zákona

Význam slabých hran

- silné hrany tvoří shluky
- slabé hrany propojují tyto shluky
- význam např. při shánění práce

Využití

- K čemu mohou být znalosti o vlastnostech komplexních sítí?
 - Kde to můžeme využít (i komerčně)?
 - Co potřebujeme dále rozvinout?

Analýza sociálních sítí

social network analysis

- studováno dlouho – donedávna však data pouze v malém (dotazníky)
 - nyní data ve velkém (mobily, e-maily, Facebook, ...)
 - analýzy: metriky centrality, detekce shluků
 - komerční využití:
 - mobilní operátoři a nabídky zákazníkům
 - doporučující algoritmy

Míry centrality

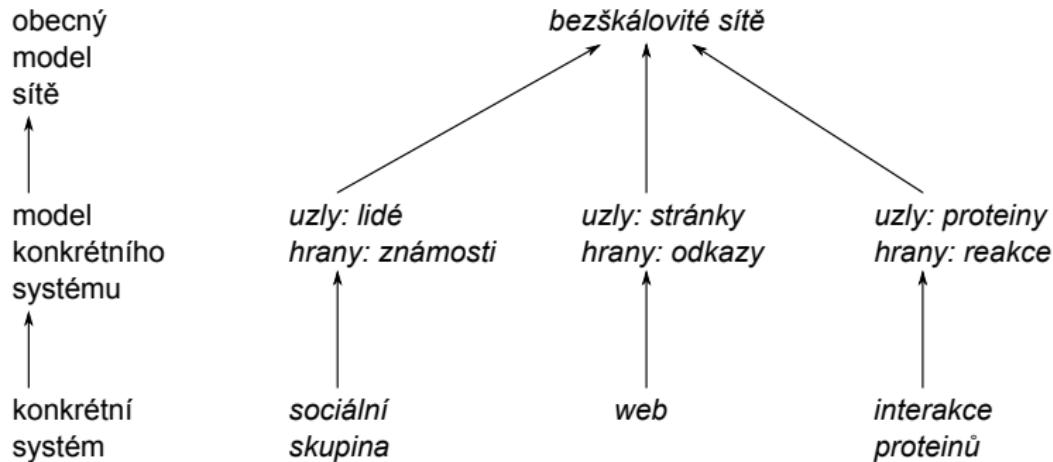
Kdo je klíčovou osobou ve skupině? Co jsou centrální uzly v grafu?

- degree centrality \sim stupeň vrcholu
- closeness centrality \sim jak moc uprostřed, průměrná vzdálenost k ostatním vrcholům
- betweenness centrality \sim jak moc propojuje ostatní, kolik nejkratších cest vede přes vrchol
- hubs and authorities
- a další ...

Modely komplexních sítí

- komplexní sítě mají **typické vlastnosti**
 - dokážeme tyto vlastnosti **modelovat** na abstraktní úrovni?

Úrovně abstrakce





Základní modely komplexních sítí

- náhodné grafy (Erdős-Renyi model)
- grafy malého světa (small-world graphs, Watts-Strogatz model)
- bezškálovité sítě (scale-free networks, Barabási-Albert model)

modely jednoduché, umožňují simulaci i částečné analytické řešení

Náhodné grafy

Erdős-Renyi model:

- množina vrcholů V , počet hran m
 - z množiny potenciálních hran $\binom{V}{2}$ vybereme náhodně m hran

Alternativní definice (zhruba ekvivalentní):

- množina vrcholů V , pravděpodobnost p
 - pro každou dvojici vrcholů vložíme hranu s pravděpodobností p

Zajímavé výsledky

- „téměř všechny grafy mají vlastnost Q “ = pravděpodobnost se blíží k 1 (v limitě pro $n \rightarrow \infty$)
- pro hodně vlastností **fázový přechod**:
 - grafy s pravděpodobností hran $p \Rightarrow$ téměř všechny mají danou vlastnost nebo ji nemají (např. souvislost)
 - skokový přechod
- NetLogo: Networks / Giant Component: náhodný graf, velikost největší komponenty

Vlastnosti

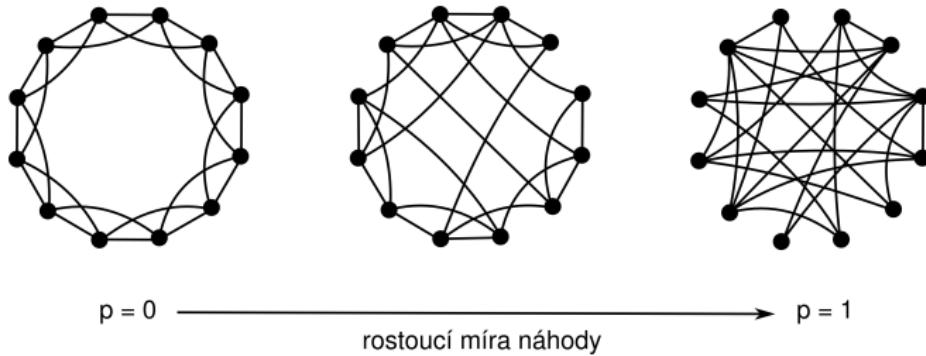
- průměrná délka cesty: $\sim \log n$
- distribuce stupňů: Poissonova distribuce
- shlukování: průměrný shlukovací koeficient $C \sim p \sim \frac{m}{n}$, výrazně méně než u reálných komplexních sítí

vlastnosti reálných sítí: splňují malý svět, nesplňují ostatní

Grafy malého světa

(Small-world graphs, Watts-Strogatz model)

- ① **pravidelná inicializace:** N vrcholů, uspořádáme do kruhu, každý spojíme s K sousedy ($K/2$ na každé straně)
- ② **náhodné předrátování:** \forall hrany – s pravděpodobností p nahradíme náhodnou hranou

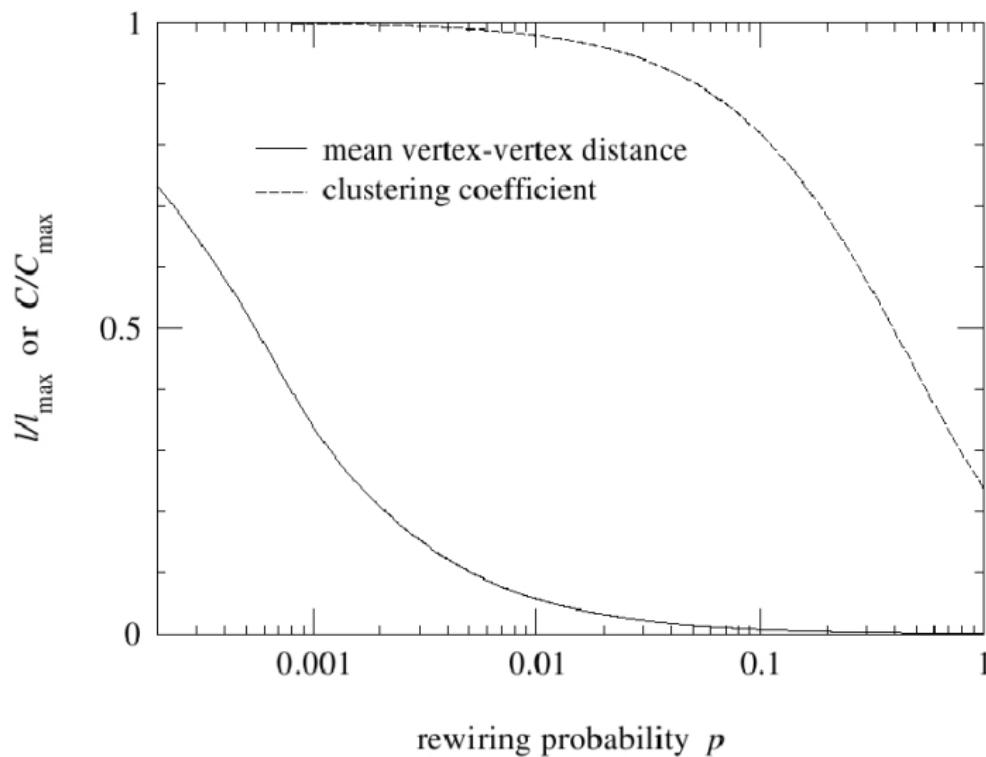


NetLogo: Networks / Small Worlds

Vlastnosti

- průměrná délka cesty $\sim \log N$ (pro vhodné p , přesná charakteristika složitá)
- shlukování: pro $p = 0$ máme $C = \frac{3(K-2)}{4(K-1)}$, pro větší p trochu menší, ale stále **dosti velké** (reálné)
- distribuce stupňů \sim Poissonova distribuce (přesná charakterizace složitá), **jiná** než u reálných komplexních sítí

Mezi řádem a náhodou



Bezškálovité sítě

(scale-free networks, Barabási-Albert model)

- ① začít s malým množstvím vrcholů a hran
- ② postupně přidávat vrcholy, nově přidaný vrchol je spojen k hranami
- ③ upřednostněné připojení (preferential attachment): pravděpodobnost, že bude vrchol vybrán je úměrná jeho aktuálnímu stupni

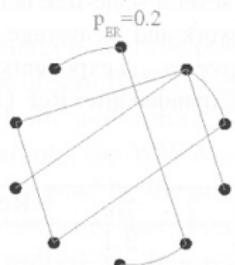
$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum k_j}$$

NetLogo: Networks / Preferential Attachment

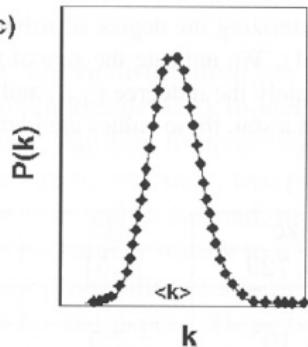
Vlastnosti

- průměrná délka cesty: $\sim \log N$
- distribuce stupňů: **mocninný zákon** (pro základní model s fixním $\gamma = 3$)
- shlukování: větší než u náhodných grafů, ale klesá s velikostí grafu (na rozdíl od Watts-Strogatz modelu), je **menší** než pro reálné sítě

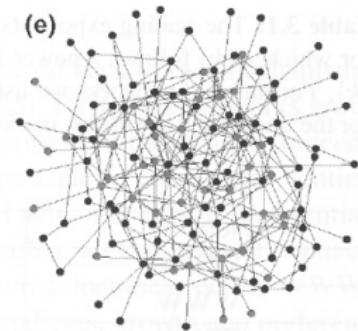
(a)



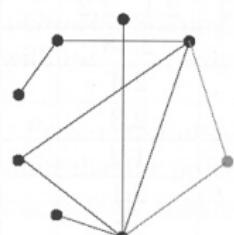
(c)



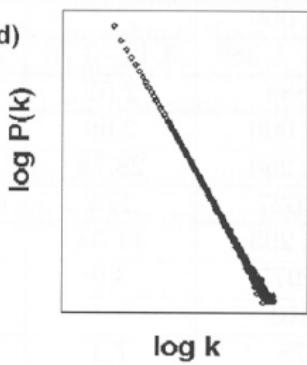
(e)



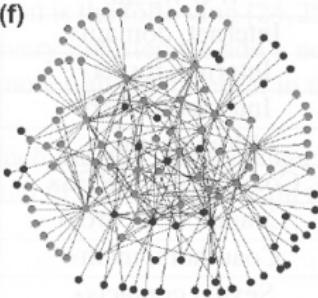
(b)



(d)



(f)



Poznámky

- proti předchozím dvěma modelům je zde důraz na **vznik** (růst) sítí – žádaná struktura vzniká jako vedlejší produkt
- upřednostněné připojení = **pozitivní zpětná vazba**
- důležitý postupný růst i upřednostněné připojení

Další modely rostoucích sítí

- nelineární $\Pi(k)$ (upřednostněné připojení)
- počáteční atraktivnost
- stárnutí, způsobilost (fitness)
- rušení, přesměrování hran

Deterministický model bezškálovité sítě I

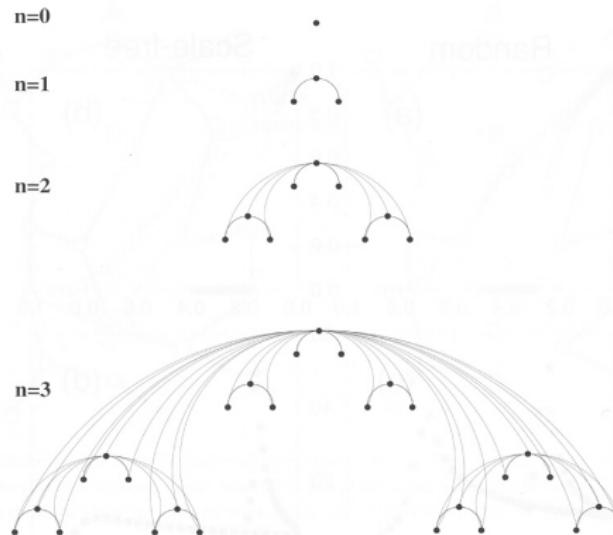
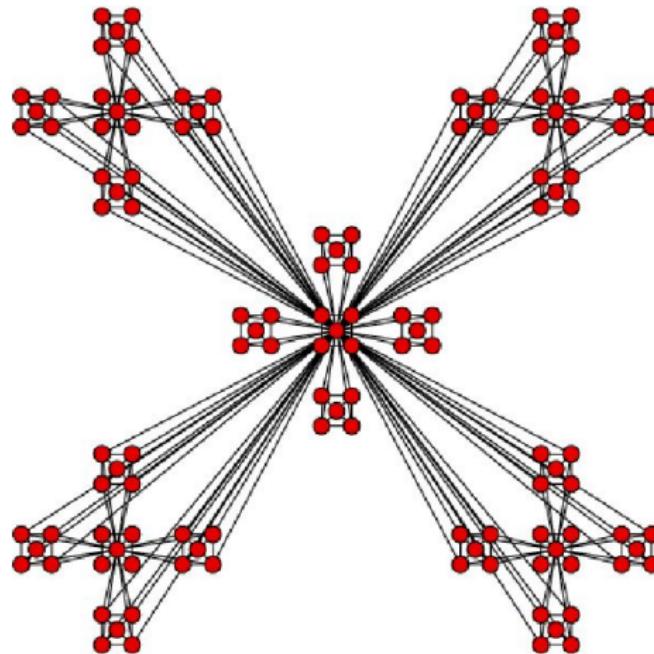


Figure 3.6: Construction of the deterministic scale-free network, showing the first four steps of the iterative process. After [42].

Deterministický model bezškálovité sítě II





K čemu to je?

- komplexní sítě mají zajímavé vlastnosti
- máme modely, které tyto vlastnosti (do určité míry) reprodukují

K čemu to je?

- komplexní sítě mají zajímavé vlastnosti
- máme modely, které tyto vlastnosti (do určité míry) reprodukují
- no a co?
- můžeme to nějak využít?

Procesy na sítích

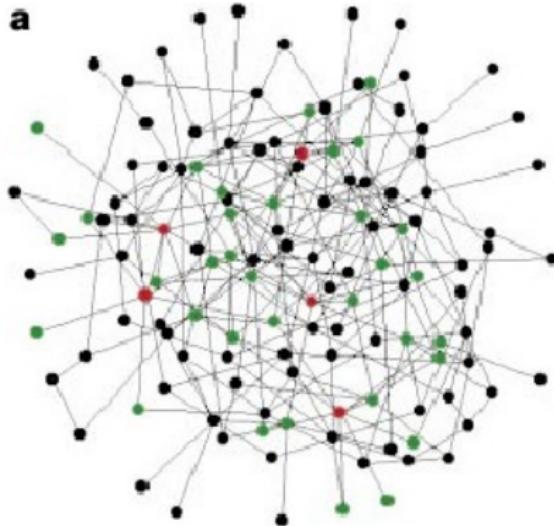
- chyby, útoky, stabilita
- šíření epidemií, informací
- hledání v sítích
- spolupráce

analýzu procesů provádíme zejména pomocí **simulace**

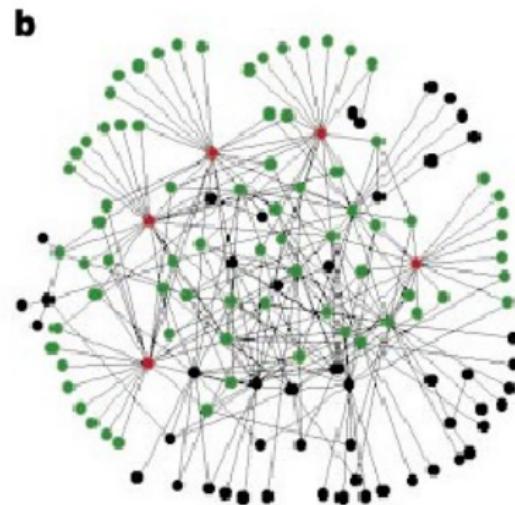
Chyby, útoky, robustnost sítí

- **robustnost sítě**: jak se změní vlastnosti sítě (souvislost, průměrná vzdálenost) při odstranění určitých uzlů
- **chyby** = náhodně odstraněné uzly
- **útoky** = cíleně odstraněné uzly, většinou ty s největším stupněm
- Jaký vliv na robustnost má topologie sítě?

Role klíčových uzlů

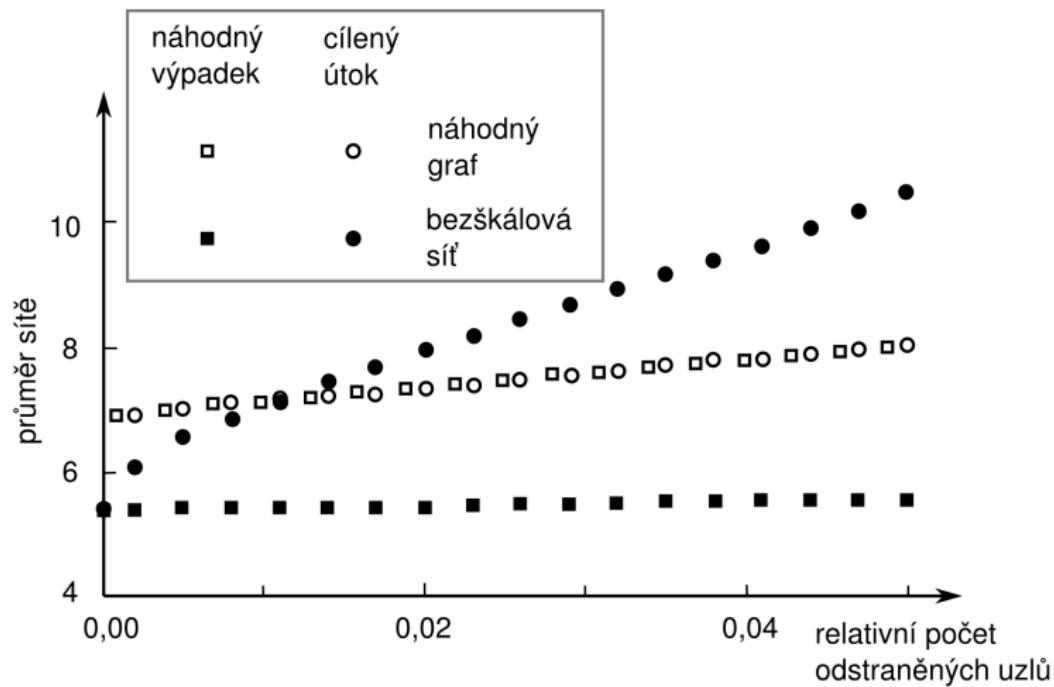


Exponential



Scale-free

Odolnost proti chybám a útokům



Robustnost a topologie

Bezškálovité sítě (oproti náhodným):

- **vyšší odolnost proti chybám**
- **náchylnější proti útokům** – „Achilova pata komplexních sítí“

Příklady

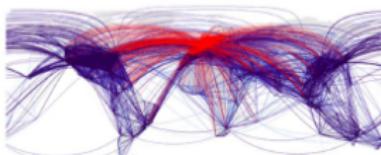
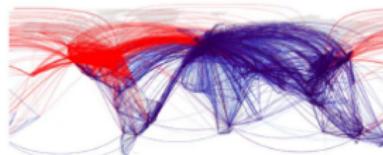
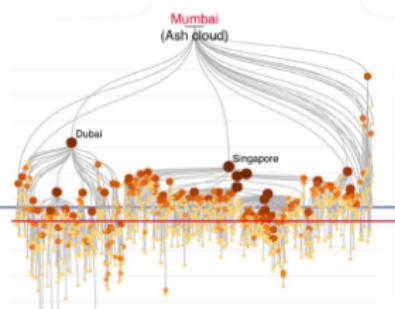
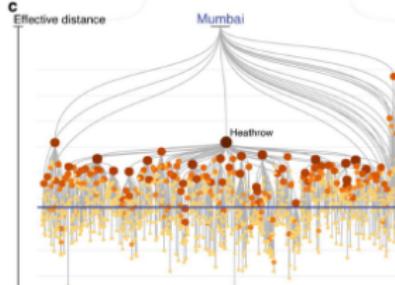
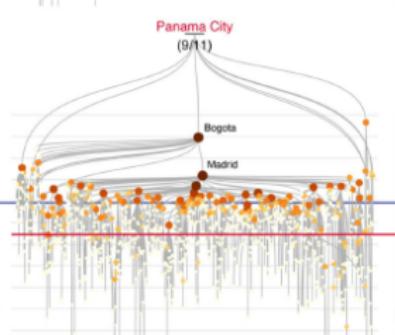
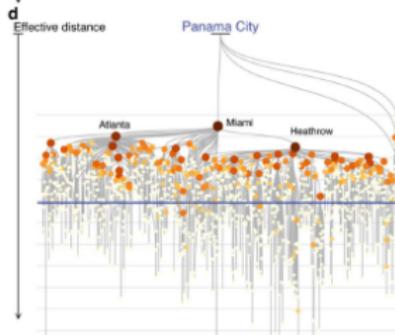
Bezškálovité sítě s uvedenými vlastnostmi (odolnost proti chybám, náchylnost k útokům):

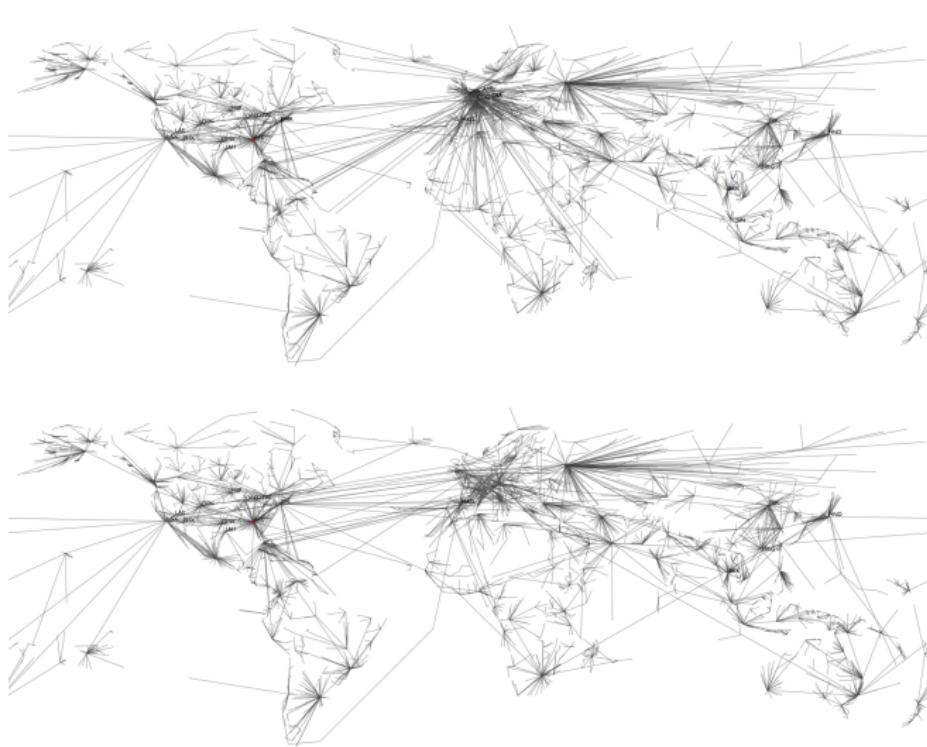
- komunikační sítě (Internet, www)
- ekonomické sítě (a např. teroristický útok na NY)
- proteiny – funkčnost vysoce propojených proteinů je životně důležitá

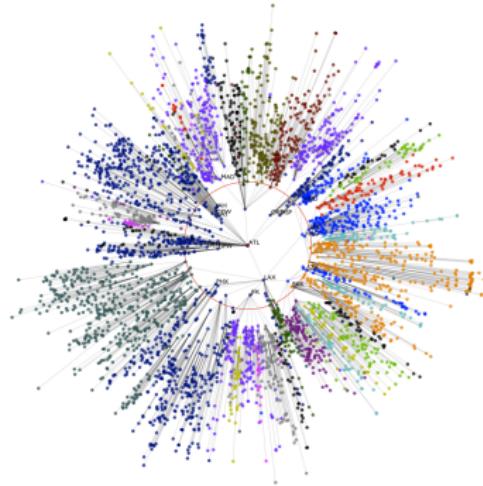
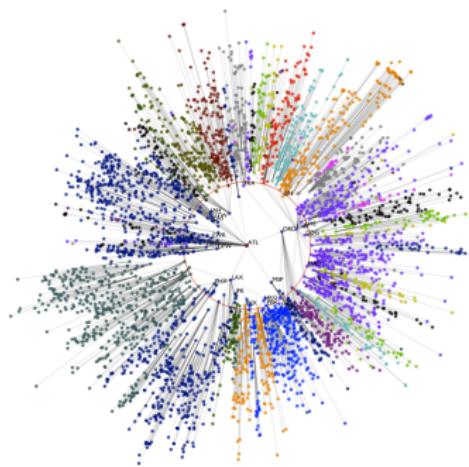
Analýza nad daty: letecká doprava

- *Eyjafjallajokull and 9/11: The Impact of Large-Scale Disasters on Worldwide Mobility*
- [http://rocs.northwestern.edu/projects/
resilience/eyjafjallajokull.html](http://rocs.northwestern.edu/projects/resilience/eyjafjallajokull.html)



a**b****c****d**





Letecká doprava – závěry studie

- velký dopad uzavření evropských letišť – spojnice regionů
- zranitelnost okrajových částí
- význam spojnic „mimo jádro sítě“

Dynamické efekty

- změna v síti může vyvolávat další změny
- např. elektrická energie v elektrické síti, energie v potravních řetězcích
- tok ovlivňuje funkčnost sítě
- jaká je robustnost sítě?
- jak souvisí s topologií sítě?



Dynamické efekty

- narušení sítě může vést k neočekávaným důsledkům (vlivem zpětných vazeb)
- elektřina: výpadek celé sítě vlivem kumulace zátěže
- potravní řetězce: vyhubení predátora vedoucí k poklesu kořisti

Robustnost: příklady studovaných otázek

- Jaký je vliv stability/robustnosti a složitosti sítě?
- Jaký vliv na stabilitu ekosystému má složitost potravního řetězce (a potažmo biodiverzita)?
- Proč jsou potravní řetězce krátké?
- různé výsledky pro sítě modelované náhodně a sítě modelované realističtěji

Šíření epidemií

- šíření počítačových virů po Internetu
- HIV po sexuální síti
- šíření náboženství, informací v sociální síti
- šíření nových technologií (na základě sociální sítě)

Imunizace

- léky
- antiviry
- cenzura, inkvizice
- reklama

Dopad použití sítí na simulace

epidemii můžeme simuloval za využití:

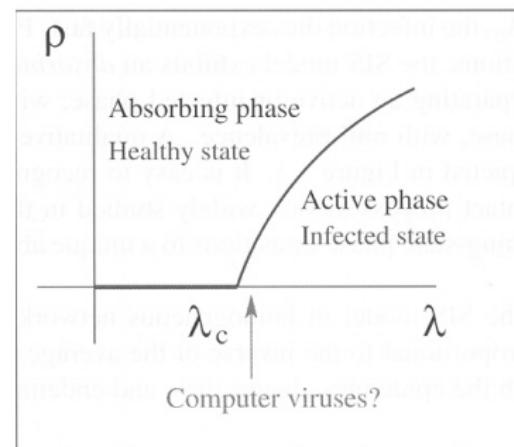
- homogenního prostředí / náhodném pohybu
NetLogo / epiDEM / epiDEM Basic
- modelů sítí
NetLogo / Networks / Virus on Network

Je to důležitý rozdíl? V čem se mohou lišit výsledky?

Epidemie v homogenním prostředí

V „homogenním“ prostředí (de facto náhodný graf):

- kritická hranice
 - infekčnost menší \Rightarrow epidemie se nešíří
 - infekčnost větší \Rightarrow epidemie se výrazně šíří
- uniformní imunizace

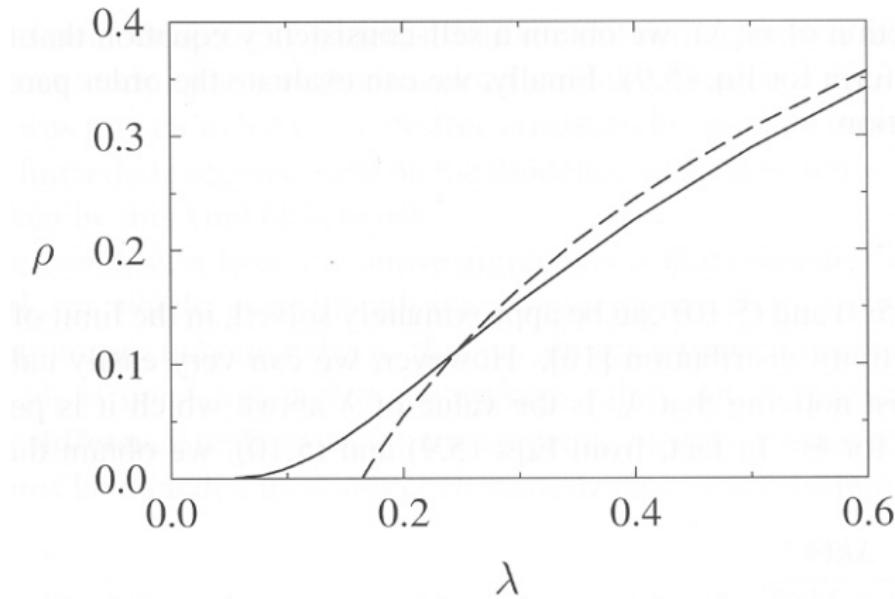


Epidemie v bezškálovitých sítích

- neexistuje kritická hranice
- nemoc s velmi malou infekčností se může rozšířit – díky uzlům s vysokým stupněm
- uniformní imunizace je poměrně neúčinná
- **cílená imunizace** zasahující hlavně uzly s vysokým stupněm však může být velmi účinná

Praktické poučení: např. pro boj s AIDS

Epidemie v bezškálovitých sítích



Hledání v grafu

- vlastnost „malého světa“ – mezi většinou uzelů **existují krátké cesty**
- Jak tyto cesty najít?
- Milnerův experiment:
 - nejen, že existuje krátký řetězec známostí
 - účastníci experimentu jej byli schopni najít **bez znalosti celého grafu**, tj. jen za použití **lokálních informací** (srovnej ABM)

Kleinbergův model

- graf je založen na dvourozměrné mřížce, uzly spojeny se sousedy
- náhodně přidány dlouhé vazby
- informace o poloze v této mřížce je využívána pro navigaci směrem k cíli

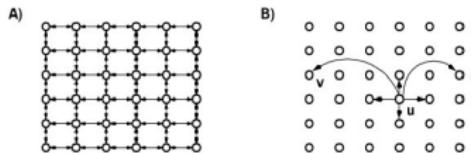


Figure 1: (A) A two-dimensional grid network with $n = 6$, $p = 1$, and $q = 0$. (B) The contacts of a node u with $p = 1$ and $q = 2$. v and w are the two long-range contacts.

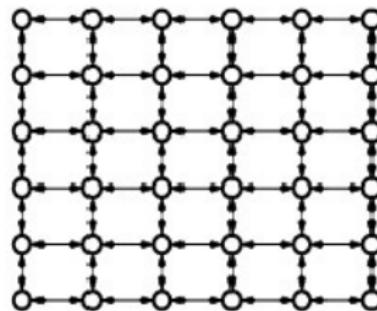
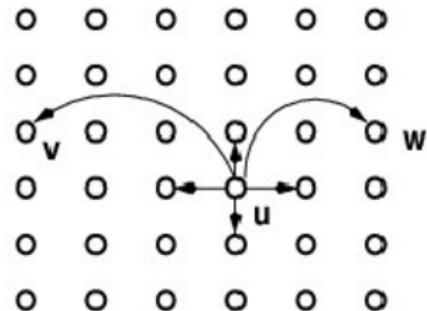
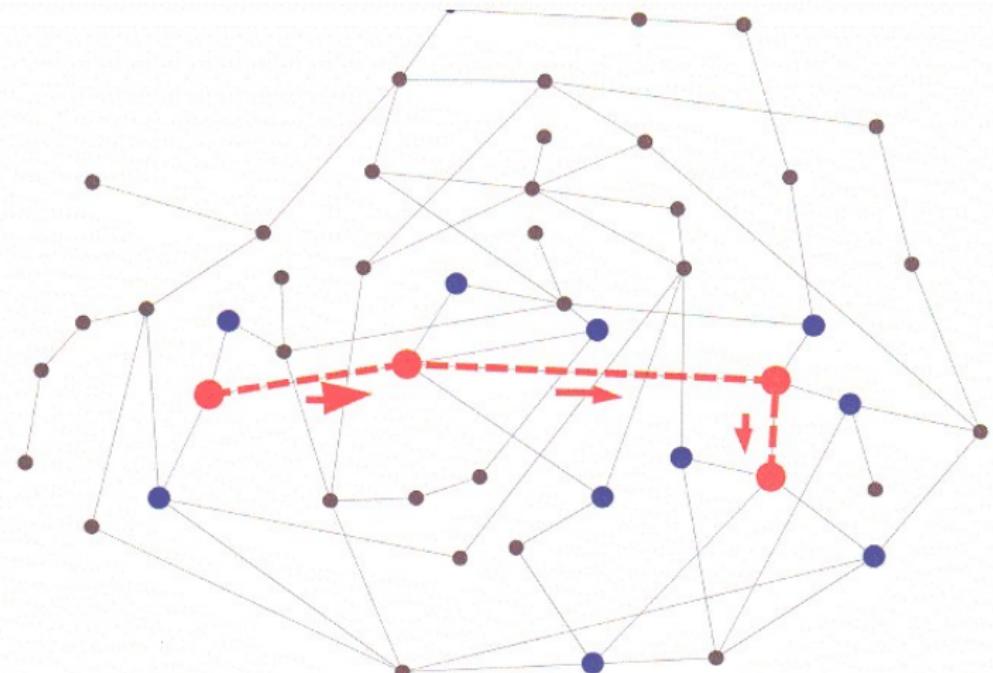
A)**B)**

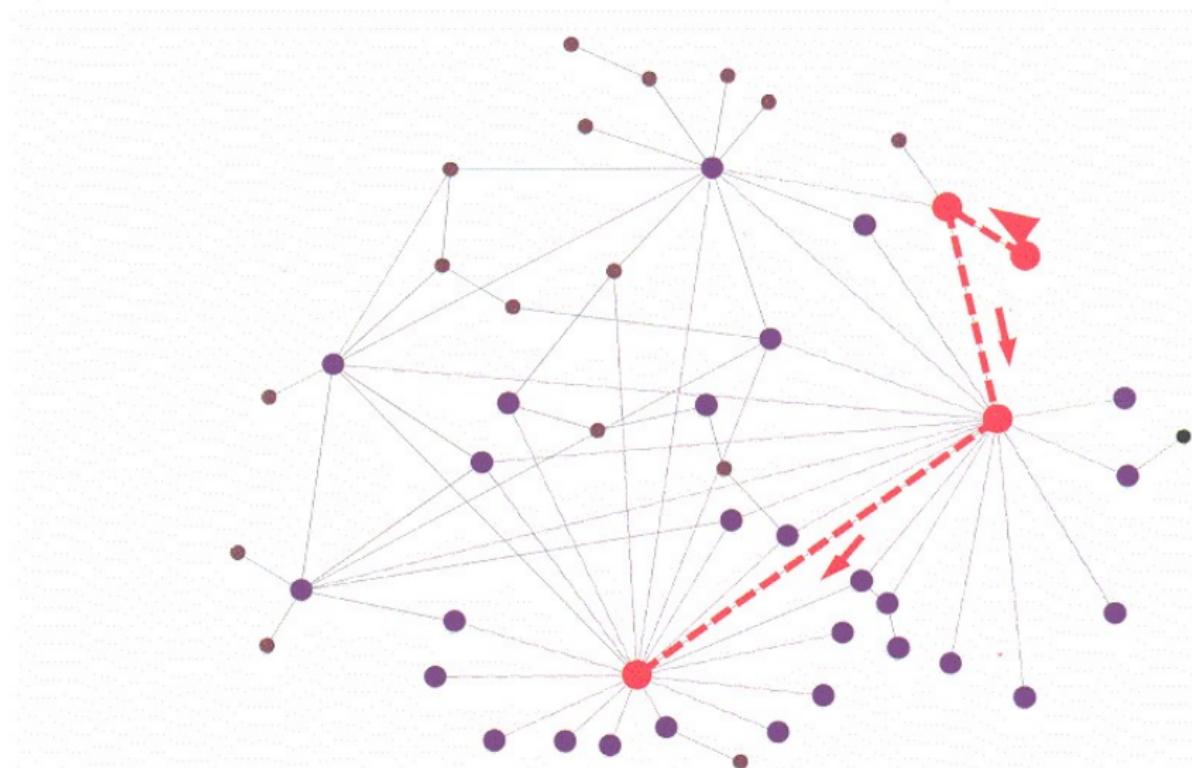
Figure 1: (A) A two-dimensional grid network with $n = 6$, $p = 1$, and $q = 0$. (B) The contacts of a node u with $p = 1$ and $q = 2$. v and w are the two long-range contacts.

Hledání s využitím náhodné procházky

- velký a neznámý graf \Rightarrow náhodná procházka
- **náhodná procházka** (random walk) = vždy vybírá další uzel pro navštívení čistě náhodně
- bezškálovité grafy: cíleně preferujeme uzly s vyšším stupněm
- výsledky simulace: lepší pokrytí než čistá náhodná procházka
- aplikace: Gnutella (peer-to-peer filesharing system)



Hledání v grafu



[Další procesy](#)

Dynamika spolupráce v síti

- dilema vězně - dříve studováno v homogenním prostředí (každý s každým nebo pravidelná mřížka)
- jaký je vliv topologie sítě na vývoj spolupráce?
- pozorování:
 - shlukování podporuje rozvoj spolupráce
 - na grafech malého světa se spolupráci daří lépe než na náhodných grafech

Další procesy na sítích

- buněčné automaty na sítích
 - synchronizace
 - formování názorů
 - iterované hry

NetLogo poznámky

- Models Library / Networks
- entita link, ask link-neighbors
- vykreslení grafu: layout-circle, layout-spring
- cyklení: repeat, loop, while
- Preferential attachment model – elegantní realizace náhodného výběru podle distribuce stupňů:
report [one-of both-ends] of one-of links

Procesy na sítích

- Diffusion on a Directed Network – toky na sítích (např. voda, energie, peníze), základ modelu
- Virus on a Network – variace na SIR model epidemie, „geografická“ topologie sítě
- Team Assembly – formace týmů, vznik sítě spolupráce

Shrnutí

- **příklady** komplexních sítí
- **společné vlastnosti**: krátké cesty, shlukování, bezškálovitost
- **abstraktní modely**: náhodné grafy, malý svět, bezškálovité sítě
- **procesy na sítích**: útoky, výpadky, epidemie, šíření informací, spolupráce, hledání
- chování modelů studováno pomocí simulace