Matematické modelování a systémová dynamika

Radek Pelánek

Modelování shora

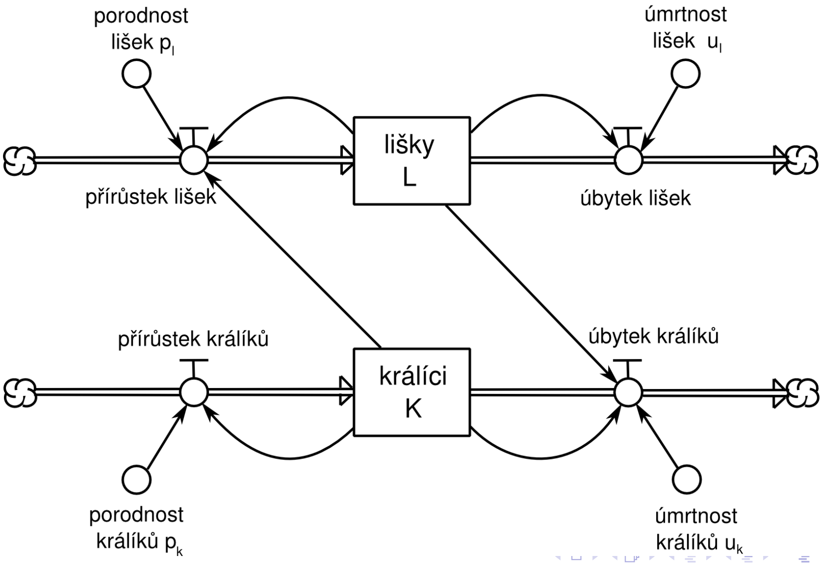
- souhrnné proměnné, abstrahování od jednotlivců, lokálních vztahů
- model = systém rovnic
- simulace = numerické řešení těchto rovnic

Lovec-kořist: matematický model

$$\frac{dL}{dt} = p_l KL - u_l L$$
$$\frac{dK}{dt} = p_k K - u_k KL$$

(Lotka-Voltera model)

Lovec-kořist: systémový model



Matematické modelování

Základní princip:

- stav systému = vektor stavových proměnných
- chování systému (změna) = rovnice nad stavovými proměnnými

Základní dělení:

- diskrétní čas
- spojitý čas

Diskrétní čas

- rekurentní rovnice
- stavová proměnná = posloupnost X_t

Fibonacciho králíci: model

- (velmi zjednodušený) model množení králíků
- X_t = počet párů králíků
- králíci nesmrtelní
- od věku 2 let se množí
- model:
  - počáteční stav: $X_1 = X_2 = 1$
  - rovnice popisující změnu:

$$X_{t+1} = X_t + X_{t-1}$$

Fibonacciho králíci: chování

Model:

$$X_{t+1} = X_t + X_{t-1} \qquad X_1 = X_2 = 1$$

Test: které z následujícího je explicitním řešením?

$$X_t = \frac{\phi^t + 1}{2} - 1$$

$$X_t = \frac{\phi^t - (1-\phi)^t}{\sqrt{5}}$$

$$X_t = \frac{t \cdot (1-\phi)}{(1+\phi)}$$

ve všech případech:

$$\phi = (1+\sqrt{5})/2$$

Fibonacciho králíci: chování

Model:

$$X_{t+1} = X_t + X_{t-1} \qquad X_1 = X_2 = 1$$

Explicitní řešení:

$$X_t = \frac{\phi^t - (1-\phi)^t}{\sqrt{5}}, \text{kde } \phi = (1+\sqrt{5})/2$$

Simulace ($=$ dosazení):
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Fibonacciho králíci: poznámky

- populace roste nade všechny meze (exponenciálně)
- pouze pozitivní zpětná vazba
- chybí korigující negativní zpětná vazba

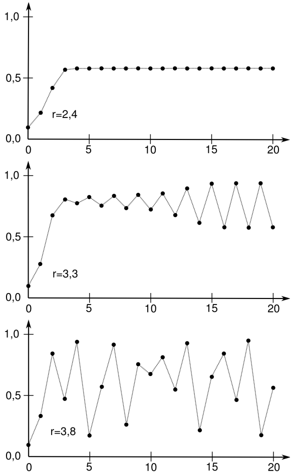
Logistická rovnice: model

- r – míra reprodukce
- K – kapacita prostředí
- rovnice:

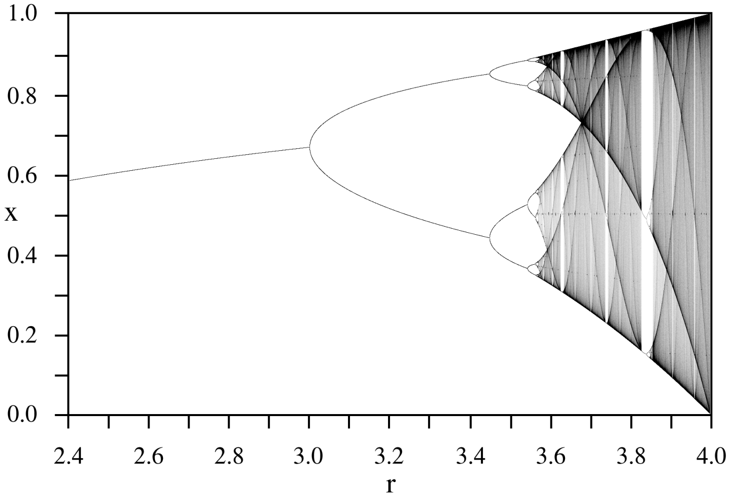
$$X_{t+1} = r \cdot X_t \cdot (1 - X_t/K)$$

Jak se bude model chovat pro $K = 1, X_1 = 0.2$ a různé hodnoty r?

Logistická rovnice: chování



Logistická rovnice: Feigenbaumův diagram



Logistická rovnice: poznámky

- kombinace pozitivní a negativní zpětné vazby
- velmi jednoduchý systém – složité chování (chaos)
- nutnost použití výpočetní simulace

Spojitý čas

- motivace použití spojitého času:
  - nelze čas rozdělit na diskrétní kroky, např. přítok a odtok vody
  - jednodušší matematické zpracování než diskrétní čas
- diferenciální rovnice
  - základ: $\frac{dX}{dt} \sim$ „změna hodnoty proměnné X v čase t“

Model populace I

změna velikosti populace = počet narození – počet úmrtí

$$\frac{dX}{dt} = pX - uX$$

$$r = p - u$$

$$\frac{dX}{dt} = rX$$

Model populace I: chování

Explicitní řešení diferenciální rovnice:

$$X(t) = X(0)e^{rt}$$

exponenciální růst (pokles) – srovnej Fibonacciho králíci

Model populace II

Podobně jako pro diskrétní logistickou rovnici:

$$\frac{dX}{dt} = r \cdot X \cdot (1 - \frac{X}{K})$$

Explicitní řešení:

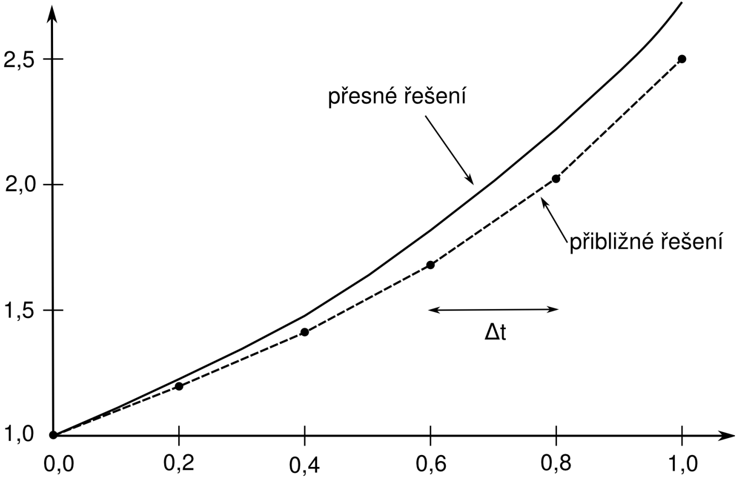
$$X(t) = \frac{K}{1 + ce^{-rt}}, c = \frac{K}{X(0)} - 1$$

Numerické řešení rovnic

- explicitní obecné řešení – málokdy
- numerické řešení:
  - přibližné řešení pro konkrétní hodnoty
  - mírně nepřesné, ale pro modelování dostatečné
  - nutno však pamatovat na nepřesnost, robustnost, ...

Základní myšlenka

- (podrobněji viz předměty na PřF: „Numerické metody“)
- numerické metody – založeny na diskretizaci
- čas – intervaly délky Δt
- v bodech $t_n = t + n \cdot \Delta t$ počítáme hodnoty y_n
- zbytek aproximujeme (např. přímkou)


přesné řešení
přibližné řešení
Δt
2,5
2,0
1,5
1,0
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0

Metody aproximace

hodnotu y_{n+1} aproximujeme s využitím hodnoty y_n:

- Eulerova metoda: použití diferenčních rovnic, $y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(y_n, t)$
- Runge-Kutta metody (2. řádu, 4. řádu): sofistikovanější metody aproximace; více operací, ale o hodně přesnější

Přesnost a výpočetní náročnost

zmenšující se Δt:

- metody konvergují k přesnému řešení
- simulace výpočetně (a tedy i časově) náročnější

Figure 13-5
Comparison of Euler's, 2nd-Order, and 4th-Order Runge-Kutta

Time	Exact Value	Euler's Method	2nd-Order Runge-Kutta	4th-Order Runge-Kutta
	$(100 * e^{-0.5 * time})$	$(dt = 0.025)$	$(dt = 0.05)$	$(dt = 0.1)$
0	100.000000	100.000000	100.000000	100.000000
0.1	95.122942	95.092971	95.123447	95.122943
0.2	90.483742	90.426732	90.484702	90.483742
0.3	86.070798	85.939465	86.072168	86.070798
0.4	81.873075	81.759933	81.874813	81.873076
0.5	77.880078	77.757464	77.882145	77.880079
0.6	74.081822	73.941383	74.084181	74.081823
0.7	70.468809	70.313533	70.471427	70.46881
0.8	67.032005	66.853223	67.034851	67.032006
0.9	63.762815	63.53223	63.765861	63.762817
1.0	60.653066	60.452232	60.656285	60.653068

Výběr metody: doporučení

- Runge-Kutta metoda – nevhodná pro modely s diskrétními prvky, na čistě spojitých lepší než Eulerova
- Eulerova metoda – nepřesná u modelů s vysokofrekvenčními oscilacemi
- volba diskrétního kroku δt:
  - maximálně polovina minimálního intervalu vyskytujícího se v modelu
  - vyzkoušet simulaci pro různé hodnoty δt

Nepřesnosti numerických metod a typy modelů

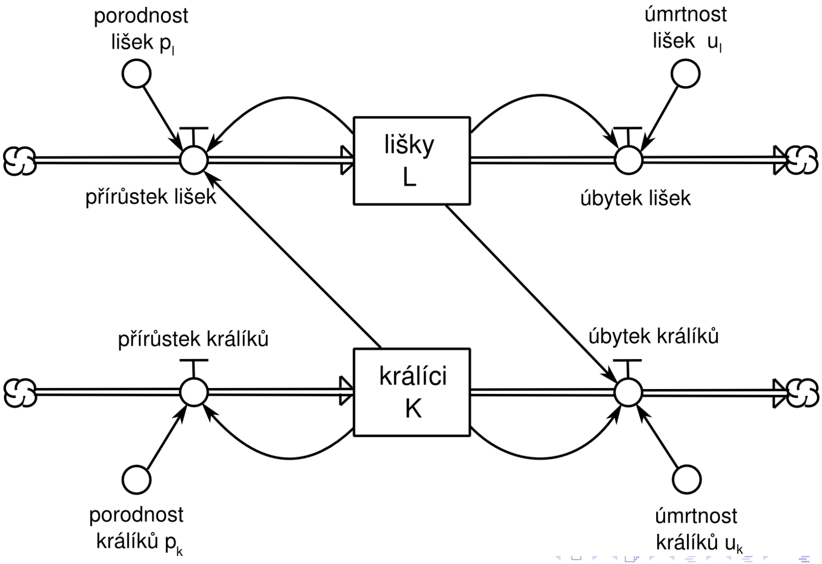
- „přesné“ modely, účel předpovědi – stabilita a přesnost numerických metod zásadní
- „hrubé“ modely, účel pochopení/vhled – nepřesnosti modelování vesměs významnější než nepřesnosti numerických metod

Systémová dynamika

„grafický front-end“ pro matematické modelování

1. grafické vyjádření základních vztahů
2. automatické vygenerování diferenciálních rovnic
3. doplnění zbývajících rovnic a hodnot parametrů
4. simulace (numerické řešení rovnic)

Příklad


porodnost
lišek p_l
úmrtnost
lišek u_l
lišky
L
přírůstek lišek
úbytek lišek
přírůstek králíků
úbytek králíků
králíci
K
porodnost
králíků p_k
úmrtnost
králíků u_k

Systémový model: základní prvky

1. zásobárny
2. toky
3. parametry
4. vztahy

Proč?

- proč nepsat rovnou rovnice?
- proč rozdělení na uvedené 4 kategorie?

- přehlednost – snadnější návrh, ladění, komunikace
- v modelování omezení může být výhodou

Základní prvky: příklady

zásobárna	tok	parametr
populace	narození, úmrtí	porodnost, úmrtnost, míra emigrace
peníze na účtu	úroky	úroková míra
teplota	ohřívání	tepelná kapacita
podíl na trhu	noví zákazníci	náklady na reklamu, účinnost reklamy, kvalita výrobku

Zásobárny

= *systémové proměnné, reservoirs, stocks*
= podstatná jména v modelu

- komponenty systému, kde se něco akumuluje
- lze číselně vyjádřit, v čase stoupá a klesá
- nereprezentuje (většinou) geografickou lokalitu
- systém zmražený v určitém okamžiku – zásobárna má nenulovou hodnotu

- velikost populace
- peníze na účtu
- teplota
- podíl na trhu

Toky

= *processes, flows*
= slovesa v modelu

- aktivity, které určují hodnotu zásobáren v čase
- určují zda obsah zásobárny narůstá/klesá
- jednosměrné i obousměrné
- systém zmražený v určitém okamžiku – toky mají nulovou hodnotu

- narození, úmrtí, emigrace
- úroky
- ohřívání, ochlazení
- noví zákazníci

Parametry

= *convertors, auxilaries, system constants*

- tempo s jakým dochází ke změně obsahu zásobárny vlivem toků
- často vnější (exogenous) proměnné systému – chování nemodelujeme
- hodnoty – pozorování, úvaha, odhad

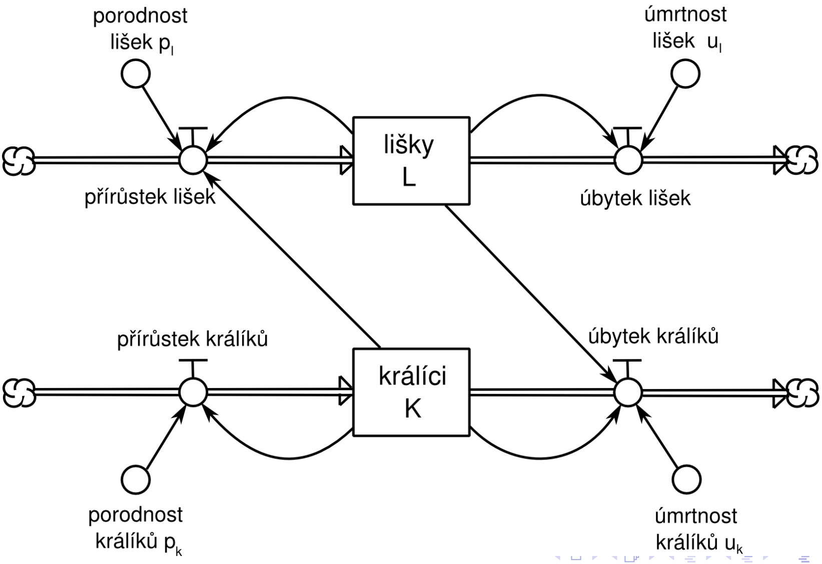
- porodnost, úmrtnost
- úroková míra
- tepelná kapacita
- náklady na reklamu, účinnost reklamy

Vztahy

= *interrelationships*

- závislosti mezi jednotlivými částmi systému
- co s čím souvisí, co na čem závisí

Lišky a králíci



Specifikace modelu

- počáteční hodnoty zásobáren (K a L)
- hodnoty parametrů (p_l, p_k, u_l, u_k)
- rovnice pro velikost toků:
    - příbytek lišek $= p_l KL$,
    - příbytek králíků $= p_k K$,
    - úbytek lišek $= u_l L$,
    - úbytek králíků $= u_k KL$.

Automaticky vygenerované rovnice

změna hodnoty zásobárny = vstupní toky – výstupní toky

$$dL/dt = p_l KL - u_l L$$

$$dK/dt = p_k K - u_k KL$$

(Jde o Lotka-Voltera model.)

Časté problémy

- toky mezi zásobárnami vs. „mimo model“
- konstanty ve špatném řádu $(0,05$ vs. $5)$
- příliš rychlé toky
- překombinované „skryté“ rovnice
- magické nepojmenované konstanty
- nesmyslné jednotky, např. tok „lidé na druhou“

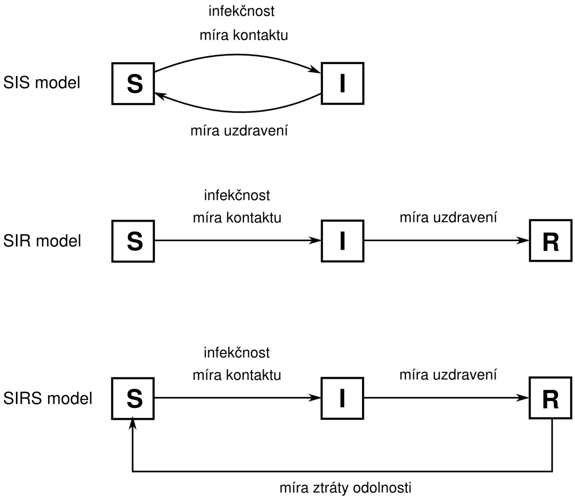
Epidemie

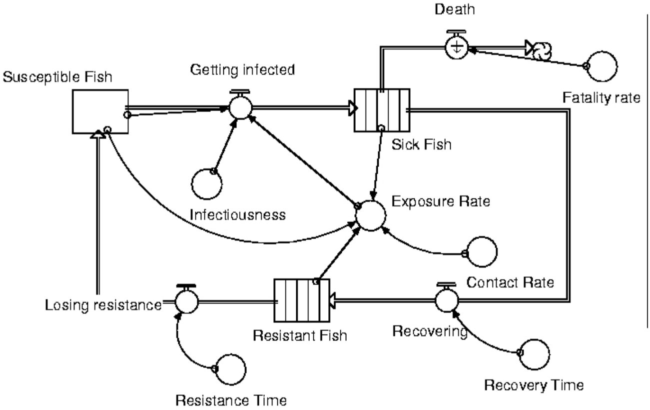
základní modelování epidemií:

- předpokládáme uzavřený systém („ryby v rybníku“)
- stavy: zdravá, nemocná, odolná
- parametry: infekčnost, úmrtnost, doba nemoci, doba odolnosti

(více o epidemiích později)

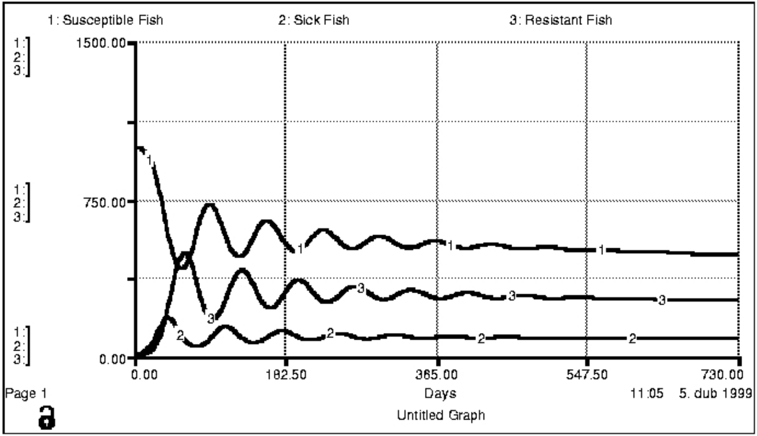
Základní modely epidemie





Pozn. Sick fish, Resistant fish – „fronta“ = rozšíření zásobárny

Epidemie


1: Susceptible Fish
2: Sick Fish
3: Resistant Fish
1500.00
750.00
0.00
0.00
182.50
365.00
547.50
730.00
Page 1
Days
11:05
5. dub 1999
Untitled Graph

Modelování demografie

- demografie – studium reprodukce lidských populací
- typická aplikace „modelování shora"
- relativně dobrá předvídatelnost vývoje
- ne úplně intuitivní, modely užitečné

Terminologická poznámka: demografie $\neq$ sociologie

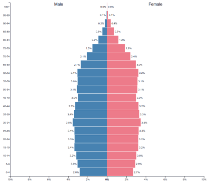
Demografie: Kvízová otázka

- populační dynamika
- země s vysokou plodností a nízkou úmrtností (tj. prudký růst populace)
- plodnost prudce klesne na cca 2 děti/ženu
- jak bude vypadat vývoj velikosti populace?
- kdy se ustálí?

Věkové pyramidy – kvíz

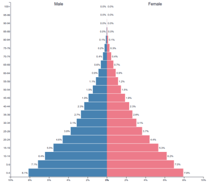
Brazílie, ČR, Japonsko, Nigérie, Rusko, USA

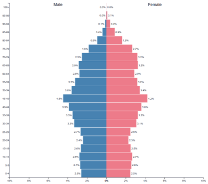
A


B


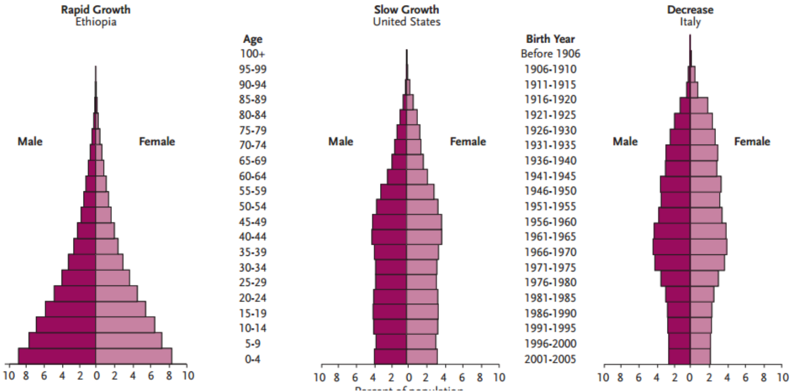
C


D


E


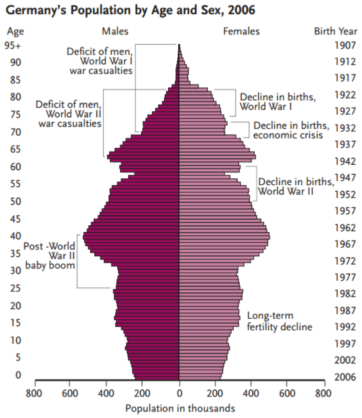
F


Věková pyramida



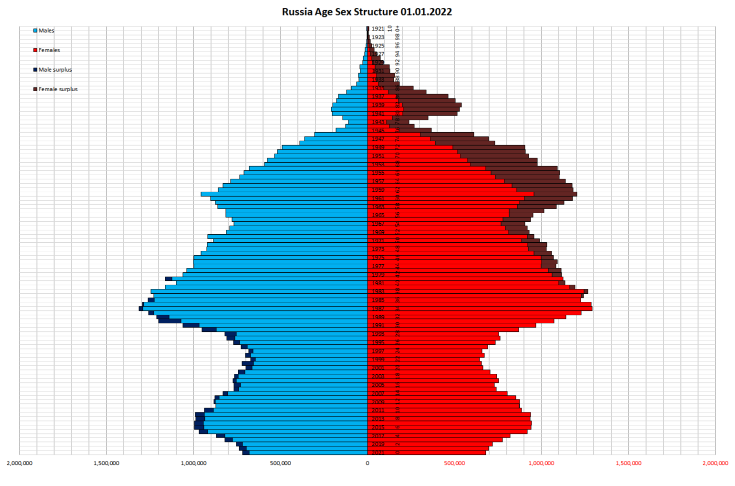
Joe McFalls (2007), Population: A Lively Introduction

Věková pyramida: Německo



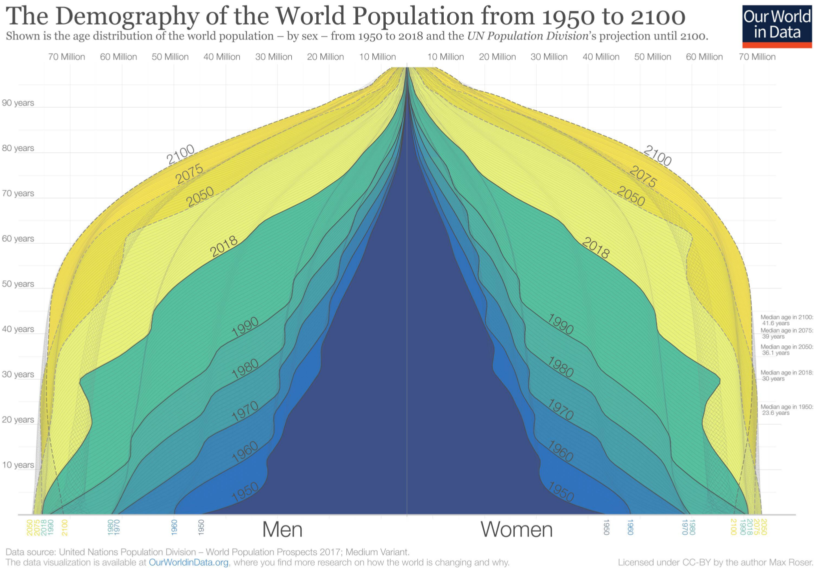
Joe McFalls (2007), Population: A Lively Introduction

Demografie



Wikipedia: Demographics of Russia

Demografie

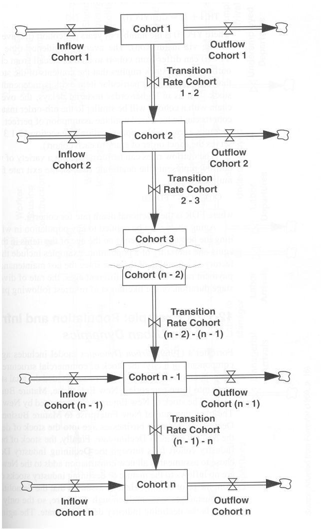

The Demography of the World Population from 1950 to 2100
Shown is the age distribution of the world population – by sex – from 1950 to 2018 and the UN Population Division's projection until 2100.
Our World in Data
70 Million
60 Million
50 Million
40 Million
30 Million
20 Million
10 Million
90 years
80 years
70 years
60 years
50 years
40 years
30 years
20 years
10 years
2100
2075
2050
2018
1990
1980
1970
1960
1950
Men
Women
Median age in 2100: 41.6 years
Median age in 2075: 39 years
Median age in 2050: 36.1 years
Median age in 2018: 30 years
Median age in 1950: 23.6 years
Data source: United Nations Population Division – World Population Prospects 2017; Medium Variant.
The data visualization is available at OurWorldinData.org, where you find more research on how the world is changing and why.
Licensed under CC-BY by the author Max Roser.

Modelování demografie: Rozklad zásobáren

rozklad zásobárny na podzásobárny, kterými elementy sekvenčně prochází

- populace: věkové skupiny
- zaměstnanci: postavení ve firmě, akademické tituly
- CFC, pesticidy
- finance: solventnost klientů

Demografie



J. Sterman, *Business Dynamics*

Modelování demografie: základní parametry

- porodnost
- úmrtnost (distribuce podle věku)
- migrace

I jednoduchý model přináší zajímavý vhled (viz kvízová otázka), příklady:

- Demographics Lab

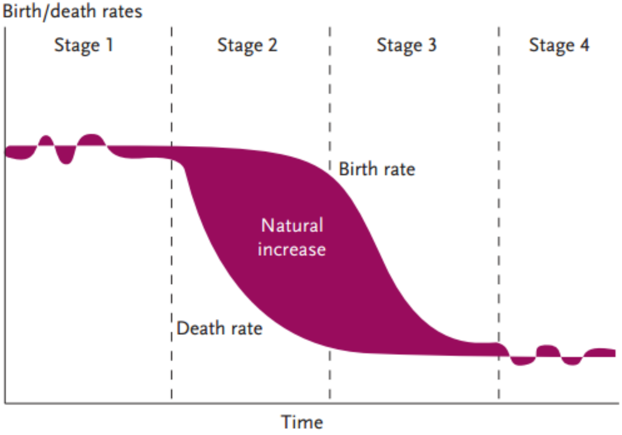
  https://www.learner.org/series/

  the-habitable-planet-a-systems-approach-to-environmental-science/demographics-lab/
- *Modelování základních demografických procesů*, BP Jan Bleha

Porodnost a plodnost

- porodnost (birth rate)
  - podíl narozených za určité časové období
  - deskriptivní statistika přímo vypočítaná z dat
  - uvádí se v promile, Česko $\sim$ 10 ‰
- plodnost (total fertility rate)
  - hypotetický počet dětí na ženu za celý život, při aktuálních trendech porodnosti
  - určitá forma modelu
  - stabilní populace $\sim$ 2,1
  - Česko $\sim$ 1,6

Demografický přechod



Joe McFalls (2007), Population: A Lively Introduction

Demografie – dopad, kontext

dopad mj. na:

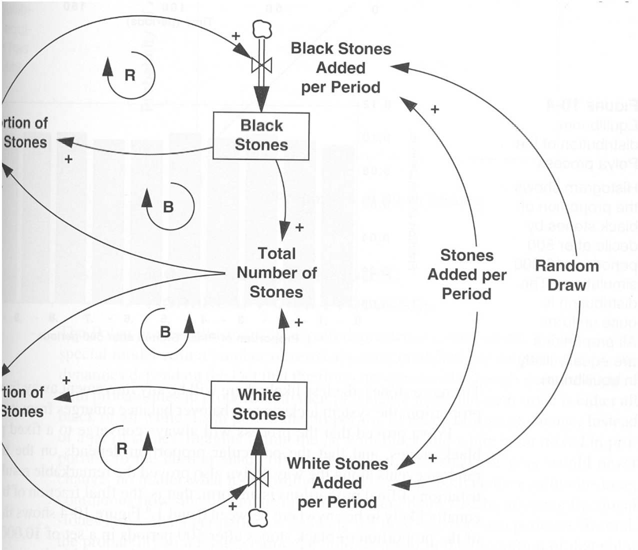
- ekonomika
- zdravotnictví
- školství

důležité faktory mj.:

- poměr pracujících k celkové populaci, demografická dividenda
- poměr skupiny 15-25 v populaci – sociální nepokoje

Polya process

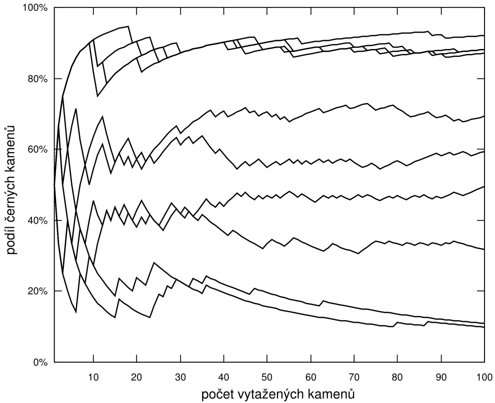
- model:
  - pytel s černými a bílými kameny
  - taháme kameny – pravděpodobnost, že vytáhneme černý je přímo úměrná podílu dosud vytažených černých kamenů
- otázky:
  - Jaký bude poměr vytažených černých/bílých v dlouhodobém horizontu?
  - Co situace modeluje?



J. Sterman, *Business Dynamics*

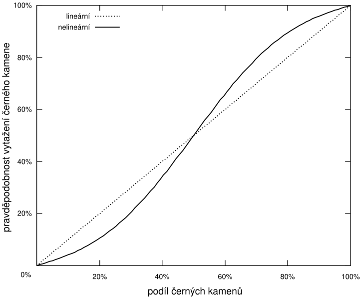
Chování

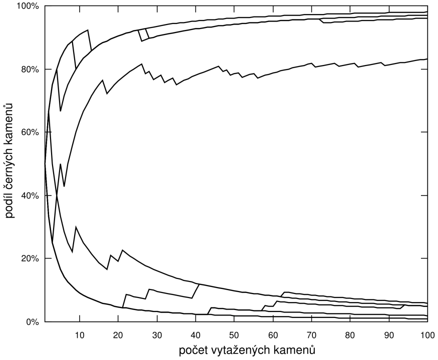
Počáteční náhodné tahy stanoví poměr, kterého se systém nadále drží (lze dokázat též analyticky).



Variace

pravděpodobnost vytažení je nelineárně závislá na poměru kamenů ⇒ poměr konverguje k 0 nebo 1





Polya process: komentáře

- lock-in: systém se zamkne do určité konfigurace, aniž by k tomu byl specifický důvod
- systém řízený pozitivní zpětnou vazbou
- o osudu rozhodují náhodné výchylky na počátku
- existence řádu není díky náhodě, je zaručena pozitivní zpětnou vazbou
- příklady?

Polya process: příklady

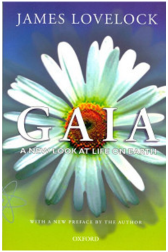
typický příklad: dvě firmy soutěží o dominanci na trhu se stejným produktem

- videokazety: VHS X Betamax
- Wintel
- Facebook vs MySpace
- QWERTY
- Silicon Valey

Hypotéza Gaia

Hypotéza Gaia (James Lovelock)

Živá hmota na planetě Zemi funguje jako jeden organismus udržující si vhodné podmínky pro život.



Svět sedmikrásek (Daisy world)

Účel modelu

Podpora teorie Gaia.

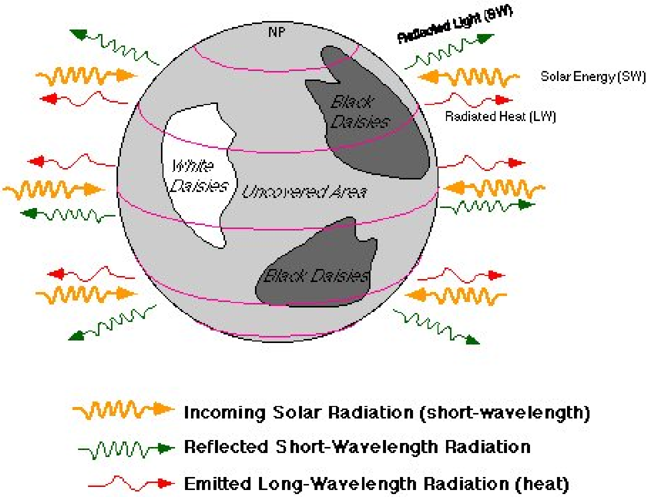
Základní myšlenka modelu

Hypotetický svět obíhající slunce, jehož teplota roste a který je schopen částečně regulovat svou teplotu.

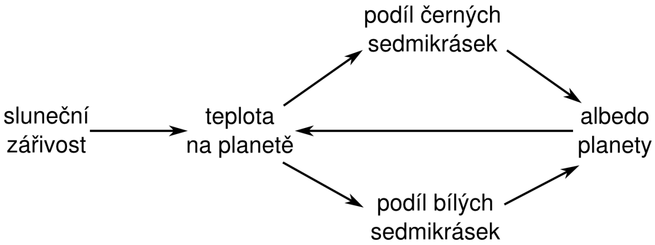
Svět sedmikrásek

- černé a bílé sedmikrásky
- růst závislý na teplotě, růstová křivka = parabola
- černé absorbují světlo
- bílé světlo odráží

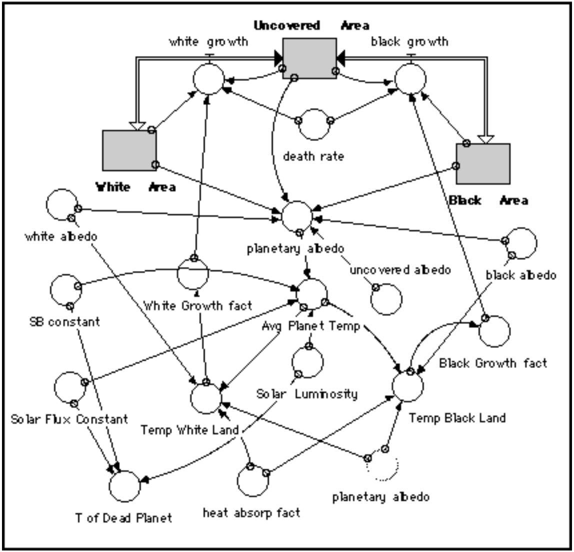
Svět sedmikrásek



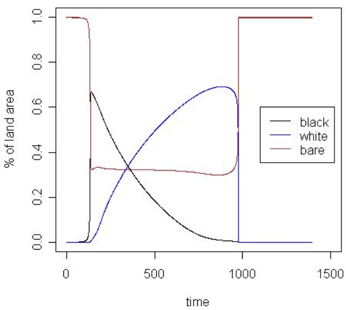
Svět sedmikrásek: regulační mechanismus

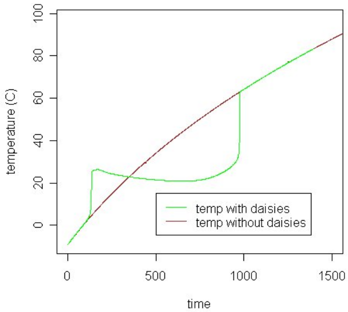


Daisyworld


Uncovered Area
white growth
black growth
death rate
White Area
Black Area
white albedo
planetary albedo
uncovered albedo
black albedo
SB constant
White Growth fact
Avg Planet Temp
Black Growth fact
Solar Luminosity
Solar Flux Constant
Temp White Land
Temp Black Land
planetary albedo
T of Dead Planet
heat absorp fact

Chování modelu





Chování: překvapivě stabilní, dosahuje *homeostasis* (schopnost udržovat rovnováhu pomocí regulačních mechanismů)

Shrnutí

- pohled shora: sumární proměnné, rovnice popisující změnu
- matematické modelování: diskrétní, spojité
- numerické řešení diferenciální rovnic
- systémová dynamika: grafická nadstavba
- příklady: lovec a kořist, epidemie, Polya process, demografie, Svět sedmikrásek