IB031 – příklady k procvičení

POZOR! Zkouškové příklady nemusí být přesně stejné! Zkouší se látka celého semestru!

1. Demonstrujte kompletní výpočet perceptronového algoritmu na tréninkové množině
$$D = \{((1,2),1),((2,1),0)\}$$
za předpokladu, že $\vec{w}^{(0)} = (0,-1,-1)$ a $\varepsilon = 1$. (Pamatujte, že $sgn(y) = 1$ pro $y \geq 0$ a $sgn(y) = 0$ pro $y < 0$.)

   Poznámka: V podobném znění se na zkoušce může objevit lineární i logistická regrese!

2. (a) Definujte pojmy support vectors a margin (zde postačí obrázek).

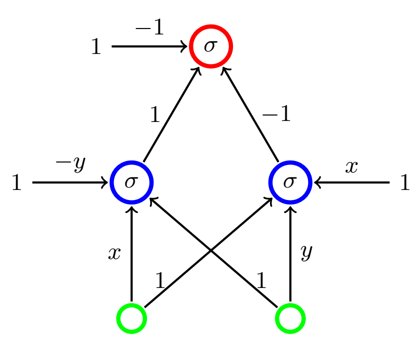
   (b) Formulujte výpočet SVM jako kvadratický optimalizační problém (quadratic optimization problem). Zde požadujeme přesnou formulaci včetně kompletního matematického zápisu! Není nutné prezentovat duální formu.

   V podobném znění se mohou objevit libovolné části teorie, kterýkoliv algoritmus.

3. Pro danou tréninkovou množinu $D = \{((0,-1),1),((2,1),1),((6,-1),-1)\}$ nalezněte lineární model, který maximalizuje margin (tedy SVM). Model popište ve tvaru váhového vektoru (w_0, w_1, w_2).

   Zkuste si to vyřešit obrázkem i s použitím teorie z přednášky (řešte kvadratický program, uvědomte si, čemu v něm odpovídají „support vectors“). Pro důkladnější procvičení zkuste vyhodit první příklad z D, tedy pracovat jen s $D = \{((2,1),1),((6,-1),-1)\}$ a také zkuste uvážit $D = \{((1,-1),1),((2,1),1),((6,-1),-1)\}$.

4. Mějme následující dvouvrstvou síť 2-2-1 (tedy se dvěma vstupními, jedním výstupním a dvěma skrytými neurony):



Zde

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \geq 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}$$

je aktivační funkcí každého neuronu, x a y jsou proměnné nabývající libovolných reálných hodnot.

(a) Demonstrujte kompletní vyhodnocení sítě pro vstup $(1, 1)$ při hodnotách proměnných $x = 3$ a $y = 2$.

(b) Nalezněte x, y takové, že pro vstup $(1, -2)$ je výstup sítě roven 0.

(c) Popište množinu všech možných přiřazení hodnot proměnným x, y takových, že pro vstup $(1, -2)$ je výstup sítě 1.

(Nápověda: Přiřazení hodnot proměnným x, y lze zapsat jako dvojici reálných čísel, stačí tedy popsat příslušnou množinu dvojic pomocí soustav nerovnic.)

5. Dejte příklad neuronové sítě (se třemi vstupy a jedním výstupem), která počítá funkci $F : \{0, 1\}^3 \to \{0, 1\}$ splňující následující (uvažujte každou podmínku zvlášť):

   (a) $F(x, y, z) = 1$ pro všechna $x, y, z \in \{0, 1\}$

   (b) $F(x, y, z) = 1$ právě tehdy, když $(x + y) \cdot z >= 1$

   (c) $F(x, y, z) = 1 - F(y, x, 1 - z)$ pro všechna $x, y, z \in \{0, 1\}$ taková, že $x \neq y$

   Jako aktivační funkci každého neuronu použijte:

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \geq 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}$$

   (Pamatujte, že chování sítě nás zajímá pouze na vstupech z $\{0, 1\}^3$.)

   Zamyslete se nad tím, co umí jeden neuron. Potom co dokážete dělat pomocí skládání neuronů a užitím logických/množinových operací (které lze opět implementovat pomocí neuronů ve vyšších vrstvách). Příkladů jako je tento lze vymyslet nekonečně mnoho :-).

6. Dejte příklad neuronové sítě (se dvěma vstupy a jedním výstupem), která počítá funkci $F : \mathbb{R}^2 \to \{0, 1\}$ splňující následující (uvažujte každou podmínku zvlášť):

   - $F(x, y) = 1$ právě tehdy, když (x, y) patří do trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$
   - $F(x, y) = 1$ právě tehdy, když (x, y) patří buď do trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ nebo do trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -2)$

Jako aktivační funkci každého neuronu použijte:

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \geq 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}$$

Pozor! Zde nás zajímá chování na všech vektorech $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Řešte podobně jako předchozí příklad, pouze si uvědomte, že teď záleží na každém bodu v rovině.

7. Uvažme dvě kategorie (categories) $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ a dvě binární vlastnosti (features):

$$X_1 : \Omega \to \{a, b\}, X_2 : \Omega \to \{c, d\}$$

Máte k dispozici následující podmíněné pravděpodobnosti:

$$P(\mathbf{1}) = 0.4$$

$$\begin{aligned} P(X_1 = a, X_2 = c | Y = \mathbf{1}) &= 0.1 \\ P(X_1 = a, X_2 = d | Y = \mathbf{1}) &= 0.2 \\ P(X_1 = b, X_2 = c | Y = \mathbf{1}) &= 0.3 \\ P(X_1 = b, X_2 = d | Y = \mathbf{1}) &= 0.4 \end{aligned}$$

(a) Klasifikujte (b, d) pomocí Bayesovského klasifikátoru (Bayes classifier) založeného na výše uvedených pravděpodobnostech a předpokladu, že $P(b, d) = 0.3$.

Pozor! Nejedná se o naivní Bayesovský klasifikátor, ale o plný Bayes.

(b) Je Bayesovský klasifikátor optimální?

8. Uvažme dvě kategorie (categories) $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ a tři binární vlastnosti (features):

$$X_{color} : \Omega \to \{red, blue\}, X_{size} : \Omega \to \{large, small\}, X_{shape} : \Omega \to \{circle, square\}$$

Máte k dispozici následující podmíněné pravděpodobnosti:

$$P(\mathbf{1}) = 0.6$$

$$\begin{aligned} P(X_{color} = red | Y = \mathbf{1}) &= 0.7 \\ P(X_{color} = red | Y = \mathbf{0}) &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{size} = large | Y = \mathbf{1}) &= 0.3 \\ P(X_{size} = large | Y = \mathbf{0}) &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{shape} = circle | Y = \mathbf{1}) &= 0.4 \\ P(X_{shape} = circle | Y = \mathbf{0}) &= 0.3 \end{aligned}$$

Pomocí naivního Bayesovského klasifikátoru (naive Bayes), založeného na výše uvedených pravděpodobnostech, klasifikujte $(blue, small)$, $(small, square)$ a $(blue, small, square)$. Nestačí pouze zapsat výsledek klasifikace, je nutné popsat celý postup výpočtu.

Zde jsou podmíněné pravděpodobnosti dány, ale můžeme i požadovat jejich odhad z tabulky (viz. přednáška).