Prenexová normální forma (pnf)

- cíl: převést libovolnou (uzavřenou) formuli do tvaru, v němž jsou všechny kvantifikátory na začátku a následuje otevřené (= bez kvantifikátorů) jádro v nkf (ndf)

$$Qx_1 \ldots Qx_n((A_{1_1} \vee \ldots \vee A_{1_{l_1}}) \wedge (A_{2_1} \vee \ldots \vee A_{2_{l_2}}) \wedge \ldots \\ \wedge (A_{m_1} \vee \ldots \vee A_{m_{l_m}}))$$

- příklad: $\forall x \forall y \exists z \forall w((P(x,y) \vee \neg Q(z)) \wedge (R(x,w) \vee R(y,w)))$
- **Věta:** pro každou formuli existuje ekvivalentní formule v konjunktivní (disjunktivní) prenexové normální formě.

Pnf: algoritmus převodu

1. eliminovat zbytečné kvantifikátory
2. přejmenovat korektně proměnné tak, aby u každého kvantifikátoru byla jiná proměnná
3. eliminovat všechny spojky různé od $\neg, \wedge$ a $\vee$
4. přesunout negaci dovnitř, je-li potřeba:
   $\neg\forall x A$ nahradit $\exists x \neg A$
   $\neg(A \wedge B)$ nahradit $\neg A \vee \neg B$ apod.
5. přesunout kvantifikátory doleva ($\circ \in \{\wedge, \vee\}, Q \in \{\forall, \exists\}$):
   $A \circ QxB$ nahradit $Qx(A \circ B)$
   $QxA \circ B$ nahradit $Qx(A \circ B)$
6. použít distributivní zákony k převodu jádra do nkf (ndf):
   $A \vee (B \wedge C)$ nahradit $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   $(A \wedge B) \vee C$ nahradit $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$

Převod do pnf – příklad

Příklad: převeďte do konjunktivní pnf formuli

$\forall x \exists y \neg (P(x,y) \Rightarrow \forall z R(y)) \vee \neg \exists x Q(x)$.

1. $\forall x \exists y \neg (P(x,y) \Rightarrow R(y)) \vee \neg \exists x Q(x)$ (zbytečné $\forall z$)
2. $\forall x_1 \exists y \neg (P(x_1,y) \Rightarrow R(y)) \vee \neg \exists x_2 Q(x_2)$ (přejmenování x)
3. $\forall x_1 \exists y \neg (\neg P(x_1,y) \vee R(y)) \vee \neg \exists x_2 Q(x_2)$ (eliminace $\Rightarrow$)
4. $\forall x_1 \exists y (P(x_1,y) \wedge \neg R(y)) \vee \forall x_2 \neg Q(x_2)$ (přesun negace 2x)
5. $\forall x_1 (\exists y (P(x_1,y) \wedge \neg R(y)) \vee \forall x_2 \neg Q(x_2))$ (posun $\forall x_1$ doleva)
   $\forall x_1 \exists y ((P(x_1,y) \wedge \neg R(y)) \vee \forall x_2 \neg Q(x_2))$ (posun $\exists y$ doleva)
   $\forall x_1 \exists y \forall x_2 ((P(x_1,y) \wedge \neg R(y)) \vee \neg Q(x_2))$ (posun $\forall x_2$ doleva)
6. $\forall x_1 \exists y \forall x_2 ((P(x_1,y) \vee \neg Q(x_2)) \wedge (\neg R(y) \vee \neg Q(x_2)))$ (jádro do nkf)