# Reprezentace pravdivostních funkcí formulemi I

Shrnutí potřebných poznatků:

- Disjunkce $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ je pravdivá, je-li pravdivá alespoň jedna její složka; je nepravdivá v jediném z $2^n$ možných případů.
- Konjunkce $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ je nepravdivá, je-li nepravdivá alespoň jedna její složka; je pravdivá v jediném případě.
- Každé formuli $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ (s $n$ různými výrokovými symboly) odpovídá určitá $n$-ární pravdivostní (booleovská) funkce.
  Každou $n$-ární pravdivostní funkci lze zadat tabulkou o $2^n$ řádcích a $n+1$ sloupcích (v prvních $n$ sloupcích jsou hodnoty argumentů, v posledním funkční hodnota).
  Různým formulím (např. $p \Rightarrow q, \neg p \vee q, \neg(p \wedge \neg q)$ aj.) může odpovídat stejná funkce.

# Reprezentace pravdivostních funkcí formulemi II

- **Věta o reprezentaci**: každou $n$-ární pravdivostní funkci lze reprezentovat formulí výrokové logiky $A(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ obsahující pouze spojky $\neg$, $\wedge$ a $\vee$, kde $m \leq n$.
- Jak zkonstruovat k funkci tuto formuli (základ důkazu věty): nechť je funkce reprezentována standardní tabulkou. Jsou-li všechny funkční hodnoty rovny 0, je reprezentující formulí libovolná kontradikce, například $p_1 \wedge \neg p_1$. Jinak pro každý řádek, v němž je funkční hodnota rovna 1, vytvoříme konjunkci $K_i = {}^i p_1 \wedge {}^i p_2 \wedge \ldots \wedge {}^i p_n$, kde pro $j = 1, 2, \ldots, n$

$$
{}^i p_j = \begin{cases} p_j & \text{je-li v } i\text{-tém řádku hodnota } j\text{-tého argumentu 1} \\ \neg p_j & \text{je-li v } i\text{-tém řádku hodnota } j\text{-tého argumentu 0} \end{cases}
$$

Disjunkce $D$ všech konjunkcí $K_i$ reprezentuje danou pravdivostní funkci.

# Normální formy formulí I

Příklad: určete formuli reprezentující následující pravdivostní funkci:

| $x$ | $y$ | $f(x,y)$ | $K_i$ | $D_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $K_1 = p \wedge q$ | |
| 1 | 0 | 0 | | $D_2 = \neg p \vee q$ |
| 0 | 1 | 1 | $K_3 = \neg p \wedge q$ | |
| 0 | 0 | 1 | $K_4 = \neg p \wedge \neg q$ | |

$D = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$; takto vytvořená formule je v *úplné normální disjunktivní formě*

- Označme souhrnně atomické formule a jejich negace jako *literály*. *Elementární konjunkcí* nad $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nazveme každou konjunkci, v níž se každý z těchto symbolů vyskytuje jako literál právě jednou. *Úplnou normální disjunktivní formou (úndf)* nad týmiž symboly nazveme každou disjunkci vesměs různých elementárních konjunkcí.

# Normální formy formulí II

- Obdobně *elementární disjunkcí* nad $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nazveme každou disjunkci, v níž se každý z těchto symbolů vyskytuje jako literál právě jednou. *Úplnou normální konjunktivní formou (únkf)* nad týmiž symboly nazveme každou konjunkci vesměs různých elementárních disjunkcí.
- Konstrukce formule v únkf k funkci (alternativní důkaz věty o reprezentaci): nechť je funkce reprezentována standardní tabulkou. Jsou-li všechny funkční hodnoty rovny 1, je reprezentující formulí libovolná tautologie, například $p_1 \vee \neg p_1$. Jinak pro každý řádek, v němž je funkční hodnota rovna 0, vytvoříme disjunkci $D_i = {}^i p_1 \vee {}^i p_2 \vee \ldots \vee {}^i p_n$, kde pro $j = 1, 2, \ldots, n$

$$ {}^i p_j = \begin{cases} p_j & \text{je-li v } i\text{-tém řádku hodnota } j\text{-tého argumentu 0} \\ \neg p_j & \text{je-li v } i\text{-tém řádku hodnota } j\text{-tého argumentu 1} \end{cases} $$

  Konjunkce $K$ všech disjunkcí $D_i$ reprezentuje danou pravdivostní funkci (v předchozím příkladu s jedinou disjunkcí je $K = D_2$).

# Vlastnosti normálních forem

- nebereme-li v úvahu komutativnost $\wedge$ a $\vee$, pak pro lib. formuli $A$ existuje právě jedna ekvivalentní úndf (není-li $A$ kontradikce) a právě jedna ekvivalentní únkf (není-li $A$ tautologie)
- pro lib. formuli $A$ platí únkf$(A) = \neg$úndf$(\neg A)$ a úndf$(A) = \neg$únkf$(\neg A)$
- kromě úndf a únkf existuje i *normální disjunktivní (konjunktivní) forma (ndf, nkf)* formulí. Formuli $A$ nazveme *ndf (nkf)* nad $p_1, p_2, \ldots, p_n$, je-li tvaru disjunkce (konjunkce), jejíž každý člen je konjunkcí (disjunkcí) nějakých literálů z $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (např. $(p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee p$ je ndf)
  pro lib. $A$ opět platí nkf$(A) = \neg$ndf$(\neg A)$ a ndf$(A) = \neg$nkf$(\neg A)$

# Užití normálních forem

- **Věta o konjunkci**: každá formule tvaru $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$, kde $B$ je konjunkcí libovolných formulí z $A_1, A_2, \ldots, A_n$, je tautologií.
  *Důkaz*: protipříkladem. Nechť $B = B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_m$, kde každé $B_i = A_j$ pro něj. $j = 1, 2, \ldots, n$. Nechť $B$ je nepravdivá, tedy existuje $i$ takové, že $B_i$ je nepravdivá. Pak příslušná $A_j = B_i$ je nepravdivá a tedy i celá konjunkce $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ je nepravdivá; implikace z věty je tedy pravdivá.
  *Pozn.*: vzhledem k větě o dedukci lze psát místo implikace $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$.
- Příklad: nalezněte všechny logické důsledky množiny $\mathbf{T} = \{p \vee q, q\}$.
  1. převedeme konjunkci $(p \vee q) \wedge q$ do úknf (tabulkou nebo ekvivalentními úpravami): $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$
  2. odvodíme důsledky:
     $\mathbf{T} \models (p \vee q), \mathbf{T} \models (\neg p \vee q), \mathbf{T} \models (p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$

# Užití normálních forem II

- Příklad: nalezněte všechny předpoklady (premisy) formule $A = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$.

  1. převedeme $A$ do úknf (tabulkou nebo ekvivalentními úpravami): $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
  2. nalezneme všechny elem. disjunkce, které nejsou v úknf$(A)$: $C_1 = p \vee q, C_2 = \neg p \vee \neg q$
  3. hledanými premisami jsou úknf$(A)$ a dále konjunkce úknf$(A)$ s libovolnou "kombinací" konjunkcí $C_i$:

     $P_1 = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
     $P_2 = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$
     $P_3 = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
     $P_4 = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

     Platí: $P_i \models A$ (také $P_i \models$ úknf$(A)$).