Formální systémy predikátové logiky

- sledujeme stejné cíle (budování teorií) a zajímají nás tytéž vlastnosti (korektnost, úplnost, rozhodnutelnost, nezávislost axiomů) jako v systémech pro výrokovou logiku
- všechny systémy uvedené pro výrokovou logiku lze rozšířit pro predikátovou logiku
- budeme se zabývat rozšířením axiomatického systému a zejména rezolucí

Axiomatický systém predikátové logiky I

- používáme spojky $\{\Rightarrow, \neg\}$ a kvantifikátor $\forall$. Ostatní spojky jsou chápány jako zkratky uvedené ve výr. logice, resp. $\exists x A =_{df} \neg\forall x \neg A$
- axiomy pro spojky (A, B, C jsou formule) – shodné s výr. logikou:
  $\mathbf{A_1}$ $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  $\mathbf{A_2}$ $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  $\mathbf{A_3}$ $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- axiomy pro $\forall$:
  $\mathbf{A_4}$ $\forall x A \Rightarrow A(x/t)$
  $\mathbf{A_5}$ $\forall x(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x B)$, A neobsahuje volně x

Axiomatický systém predikátové logiky II

- axiomy pro rovnost:

  $\mathbf{A_6}$ $x = x$

  $\mathbf{A_7}$ $(x = y) \Rightarrow (f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$

  $\mathbf{A_8}$ $(x = y) \Rightarrow (P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$

- odvozovací pravidla:
  - *modus ponens* (MP, stejné s výr. logikou): z A a $A \Rightarrow B$ odvodíme B pro libovolné formule A, B
  - *generalizace* (PG): z A odvodíme $\forall x A$

Axiomatický systém: příklad

Příklad: důkaz z předpokladu. Ukažte, že pokud je dokazatelná formule $A \Rightarrow B$ a proměnná x není volná v A, pak je dokazatelná i formule $A \Rightarrow \forall x B$.

1.	$\vdash A \Rightarrow B$	předpoklad
2.	$\vdash \forall x(A \Rightarrow B)$	PG(1)
3.	$\vdash \forall x(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x B)$	$\mathbf{A_5}$
4.	$\vdash A \Rightarrow \forall x B$	MP(2,3)

Využití axiomatického systému: teorie

- *teorie:* množina uzavřených formulí $\mathbf{T}$, *model* teorie $\mathbf{T}$: interpretace, v níž je každá formule z $\mathbf{T}$ pravdivá

Příklad: teorie elementární aritmetiky (0, unární funkce následník s, binární $+$, $*$)

- $\mathbf{Ax_1}$ $\forall x \neg(s(x) = 0)$
  $\mathbf{Ax_2}$ $\forall x(x + 0 = x)$
  $\mathbf{Ax_3}$ $\forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))$
  $\mathbf{Ax_4}$ $\forall x(x * 0 = 0)$
  $\mathbf{Ax_5}$ $\forall x \forall y(x * s(y) = (x * y) + x)$
- pomocná odvozovací pravidla:
  (PS) je-li $\vdash x = y$, pak $\vdash y = x$ (symetrie $=$)
  (PT) je-li $\vdash x = y$ a $\vdash y = z$, pak $\vdash x = z$ (tranzitivita $=$)
  (PPS) je-li $\vdash x = y$, pak $\vdash s(x) = s(y)$ (přidání s)
  (PVS) je-li $\vdash s(x) = s(y)$, pak $\vdash x = y$ (vypuštění s)

Příklad: dokažte v teorii elementární aritmetiky $s(0) + s(0) = s(s(0))$.

1.	$\vdash \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$	$\mathbf{Ax_3}$
2.	$\vdash (\forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))) \Rightarrow$ $(\forall y (s(0) + s(y) = s(s(0) + y)))$	$\mathbf{A_4}$
3.	$\vdash \forall y (s(0) + s(y) = s(s(0) + y))$	MP(1,2)
4.	$\vdash (\forall y (s(0) + s(y) = s(s(0) + y))) \Rightarrow$ $(s(0) + s(0) = s(s(0) + 0))$	$\mathbf{A_4}$
5.	$\vdash s(0) + s(0) = s(s(0) + 0)$	MP(3,4)
6.	$\vdash \forall x (x + 0 = x)$	$\mathbf{Ax_2}$
7.	$\vdash (\forall x (x + 0 = x)) \Rightarrow (s(0) + 0 = s(0))$	$\mathbf{A_4}$
8.	$\vdash s(0) + 0 = s(0)$	MP(6,7)
9.	$\vdash s(s(0) + 0) = s(s(0))$	PPS(8)
10.	$\vdash s(0) + s(0) = s(s(0))$	PT(5,9)