

Sémantika predikátové logiky

- pro analýzu sémantiky potřebujeme nejprve specifikaci jazyka (doména, konstanty, funkční a predikátové symboly)
- příklad: formální jazyk s jediným binárním predikátovým symbolem $P(x, y)$ a jediným binárním funkčním symbolem $f(x, y)$ lze chápat mj. jako
 - přirozená čísla $s < a +$
 - racionální čísla $s \geq a \max$
 - celá čísla $s > a *$
- *interpretace (realizace)* jazyka predikátové logiky je struktura I složená z
 - libovolné neprázdné množiny $\mathbf{D}$ (domény, oboru interpretace)
 - zobrazení $I(f) : \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{D}$ pro každý n -ární funkční symbol f , $n \geq 0$
 - n -ární relace $I(P) \subseteq \mathbf{D}^n$ pro každý n -ární predikátový symbol P , $n \geq 1$

Interpretace jazyka: příklad

Příklad: mějme jazyk s binárním predikátovým symbolem $P(x, y)$, binárním funkčním symbolem $f(x, y)$ a symboly pro konstanty $a, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$, který chceme interpretovat jako celá čísla s $>$ a $+$.

- $\mathbf{D}$ je množina celých čísel,
- $I(a) = 0, I(a_1) = 1, I(a_2) = 2, \dots, I(b_1) = -1, I(b_2) = -2, \dots$
(jedná se o nulární funkce),
- $I(f) = +$
(funkce zadaná pomocí rovnosti funkcí: zobrazení $I(f)$ definujeme jako funkci sčítání celých čísel; pak např. $I(f)(4, -2) = 2$),
- $I(P) = >$
(relace zadaná pomocí rovnosti relací: $I(P)$ definujeme jako relaci ,větší než‘ pro celá čísla; např. $(2, -1) \in I(P)$)

Interpretace proměnných a termů

- interpretace volných proměnných spočívá v jejich ohodnocení, což je libovolné zobrazení V (valuace) z množiny všech proměnných do $\mathbf{D}$
- ohodnocení, které přiřazuje proměnné x prvek $d \in \mathbf{D}$ a na ostatních proměnných splývá s valuací V , označíme $V[x/d]$
- hodnotou termu t v interpretaci I a valuaci V je prvek $|t|_{I,V} \in \mathbf{D}$ takový, že
 - je-li t proměnná, $|t|_{I,V} = V(t)$
 - je-li $t = f(t_1, \dots, t_n)$, pak $|t|_{I,V}$ je hodnotou funkce $I(f)$ pro argumenty $|t_1|_{I,V}, \dots, |t_n|_{I,V}$
- příklad: mějme interpretaci I z předchozího příkladu (celá čísla s $>$ a $+$) a valuaci $V(x) = 2$. Pak

$$|f(b_1, f(b_2, b_2))|_{I,V} = +(-1, +(-2, -2)) = -5$$

$$|f(f(a, b_1), f(x, a_1))|_{I,V} = +(+ (0, -1), + (2, 1)) = 2$$

Splnitelnost formulí

Formule A je splňována interpretací I a valuací V , pokud

- A je $P(t_1, \dots, t_n)$ a $(|t_1|_{I,V}, \dots, |t_n|_{I,V}) \in I(P)$
- A je $t_1 = t_2$ a $|t_1|_{I,V} = |t_2|_{I,V}$ (oba termy reprezentují týž prvek)
- A je $\neg B$ a I, V nesplňují B
- A je tvaru $B \wedge C$ a I, V splňují B i C
- A je $B \vee C$ a I, V splňují B nebo C
- A je tvaru $B \Rightarrow C$ a I, V nesplňují B nebo splňují C
- A je $B \Leftrightarrow C$ a I, V splňují B i C nebo nesplňují B i C
- A je $\forall x B$ a $I, V[x/d]$ splňují B pro libovolné $d \in \mathbf{D}$
- A je $\exists x B$ a $I, V[x/d]$ splňují B alespoň pro jedno $d \in \mathbf{D}$

Splnitelnost – příklad

Příklad: mějme dříve uvedenou interpretaci I (celá čísla $s > a +$), mějme jinou interpretaci I' téhož formálního jazyka (celá čísla $s > a *$, od I se liší pouze definicí $I'(f) = *$) a valuace definované na proměnné x takto: $V_1(x) = -2$, $V_2(x) = 2$

- formuli $\forall x P(f(x, a_1), x)$ interpretujeme v I jako $\forall x (x + 1 > x)$; formule je splňována I a libovolnou valuací. V I' interpretujeme formuli jako $\forall x (x * 1 > x)$ – není splněna pro libovolnou valuaci.
- $\forall x P(x, y)$ interpretujeme (v I i I') jako $\forall x (x > y)$, formule není splňována I (ani I') a libovolnou valuací
- formule $P(x, a)$ interpretovaná (v I i I') jako $x > 0$ je splňována I (i I') a V_2 , není splňována I (ani I') a V_1
- formule $\forall x (P(x, a) \Rightarrow \exists y P(x, y))$ interpretovaná (v I i I') jako $\forall x ((x > 0) \Rightarrow \exists y (x > y))$ je splňována I (i I') a libovolnou valuací

Pravdivost formulí a jejich klasifikace

- formuli A nazveme *pravdivou* v interpretaci I , je-li splňována I pro libovolnou valuaci, píšeme $\models_I A$
- pravdivost formule záleží pouze na valuaci volných proměnných, které se v ní vyskytují
- pravdivost sentence (uzavřené formule) nezávisí na valuaci vůbec

Formule A predikátové logiky se nazývá

- *tautologie*, je-li pravdivá pro každou interpretaci (tj. pro každou I platí $\models_I A$), značíme $\models A$
- *splnitelná*, pokud existuje alespoň jedna interpretace a valuace, které ji splňují (př.: $\forall x P(x, x)$)
- *kontradikce*, je-li $\neg A$ tautologie (tj. $\models \neg A$)

Logické vyplývání

- formule B *logicky vyplývá* z množiny formulí $\{A_1, \dots, A_n\}$, $n \geq 0$, pokud pro každou interpretaci I , v níž platí $\models_I A_1, \dots, \models_I A_n$, platí také $\models_I B$.
Píšeme $A_1, \dots, A_n \models B$.
- příklad: $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), P(a) \models Q(a)$
V libovolné interpretaci, kde jsou pravdivé $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ a $P(a)$, je pravdivá také $Q(a)$, např.
 - lidé, P být člověk, Q být smrtelný, $a = \text{Sokrates}$
 - čísla, P být sudé číslo, Q být beze zbytku dělitelný dvěma, $a = 144$
 - zvířata, P být kosatka, Q být savec, $a = \text{kosatka Willy}$

Tautologie predikátové logiky

Získané z tautologií výrokové logiky:

- nahradíme-li v tautologii výrokové logiky korektně všechny výrokové symboly formulemi predikátové logiky, získáme tautologii predikátové logiky
- příklad: v tautologii výrokové logiky $\models p \vee \neg p$ nahraďme p formulí $\forall x P(x)$, získáme tak tautologii predikátové logiky $\models \forall x P(x) \vee \neg \forall x P(x)$

Specifické pro predikátovou logiku:

- označme $A(x)$ libovolnou formuli obsahující volnou proměnnou x , $A(x, y)$ libovolnou formuli obsahující volné proměnné x a y apod.
- příklady tautologií:
 $\forall x A(x) \Rightarrow A(x/t)$ (zákon konkretizace)
 $A(x/t) \Rightarrow \exists x A(x)$ (zákon abstrakce)

Specifické tautologie predikátové logiky I

- de Morganovy zákony pro kvantifikátory:

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

příklad: negací věty *Na každém hradě straší bílá paní*. $\forall x (H(x) \Rightarrow S(x))$
je zřejmě *Na některých hradech bílá paní nestraší*.

$$\exists x \neg (H(x) \Rightarrow S(x)) \Leftrightarrow \exists x (H(x) \wedge \neg S(x))$$

- zaměnitelnost kvantifikátorů stejného typu (zobecnění komutativity $\wedge$ a $\vee$):

$$\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$$

$$\exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$$

- distributivita kvantifikátorů (zobecnění asociativity $\wedge$ a $\vee$):

$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x))$$

$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$$

Specifické tautologie predikátové logiky II

- vztahy mezi $\forall$ a $\exists$:

$$\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$$

(pozn.: požadavek neprázdnosti domény; pro prázdnou doménu jsou např.

$\forall x P(x)$ i $\forall x \neg P(x)$ pravdivé, ale $\exists x P(x)$ i $\exists x \neg P(x)$ nepravdivé – tautologie by tedy neplatila)

$$\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A(x)$$

$$\exists x A(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A(x)$$

- zaměnitelnost kvantifikátorů (jednosměrná):

$$\exists x \forall y A(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$$

- redukce univerzálního kvantifikátoru:

$$\forall x \forall y A(x, y) \Rightarrow \forall x A(x, x)$$

- vztah $\forall$ k disjunkci a $\exists$ ke konjunkci:

$$(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$$

$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$$