Predikátová logika

- plně přejímá výsledky výrokové logiky
- zabývá se navíc strukturou jednotlivých jednoduchých výroků – na základě této analýzy lze odvodit platnost některých výroků, které ve výrokové logice platné nejsou

  Příklad: mějme následující výroky (+ označení výrokovými symboly):

  Každý člověk je smrtelný. (p)

  Sokrates je člověk. (q)

  Sokrates je smrtelný. (r)

  Na základě výrokové logiky nevyplývá r z p a q; přesto je úsudek zřejmě platný (na jiné úrovni, než je výroková logika).

Základní pojmy: predikát

- *Predikát* je n-ární relace; vyjadřuje vlastnosti objektů a vztahy mezi objekty. Z jednoduchého výroku vznikne vypuštěním alespoň jednoho jména objektu (individua). Příklady predikátů :

  být menší než 3 ($x < 3$), arita 1
  být černý pes (x je černý pes), arita 1
  být menší nebo roven ($x \leq y$), arita 2
  mít rád (x má rád y), arita 2
  sedět mezi (x sedí mezi y a z), arita 3

- unární predikáty vyjadřují vlastnosti
- binární, ternární,. . . ,n-ární vyjadřují vztahy mezi dvojicemi, trojicemi,. . . ,n-ticemi objektů
- nulární predikáty představují původní výroky (bez vypuštěných jmen objektů) ve výrokové logice; v predikátové logice je označujeme jako *sentence*

Konstanty, proměnné

- *konstanty* reprezentují jména objektů (individuí); jedná se o prvky předem specifikované množiny hodnot – *domény*
- *proměnné* zastupují jména objektů, mohou nabývat libovolných hodnot z dané domény
- n-ární predikáty lze chápat jako množiny takových n-tic konstant, pro které je predikát splněn
- příklady:

  doména: přirozená čísla s nulou
  predikát $x < 4$ lze chápat jako $\{0, 1, 2, 3\}$

  doména: $\{0, 1, 2\}$
  predikát $x < y$ lze chápat jako $\{(0, 1), (1, 2), (0, 2)\}$

Funkce, termy

- *funkce* reprezentují složená jména objektů
- příklad: nechť funkce $f(x, y)$ reprezentuje sčítání. Pak $f(1, 2)$ (stejně jako $f(2, 1)$, $f(0, 3)$) jsou možná složená jména pro konstantu 3.
- poznámka: konstanty jsou nulární funkce
- výrazy složené pouze z funkčních symbolů, konstant a proměnných nazýváme *termy*
- příklad termu: $f(x, g(y, h(x, y), 1), z)$
- termy mohou nabývat hodnot v rámci dané domény (resp. její podmnožiny označované jako obor hodnot funkce)
- příklad:

  doména: přirozená čísla s nulou

  term $2 + (2 * x)$ může nabývat hodnot z množiny $\{2, 4, 6, \ldots\}$

Kvantifikátory

- složené predikáty lze kromě běžných pravdivostních spojek vytvářet pomocí *kvantifikátorů*
- *univerzální (obecný) kvantifikátor* $\forall$:
  $\forall x P(x)$ – pro každý prvek x domény platí $P(x)$
  příklad: Nechť $P(x)$ je symbolický zápis pro ‚je-li x člověk, pak x je inteligentní'. Pak $\forall x P(x)$ reprezentuje výrok ‚všichni lidé jsou inteligentní'.
- *existenční kvantifikátor* $\exists$:
  $\exists x P(x)$ – pro některé prvky x domény platí $P(x)$ (resp. existuje alespoň jeden prvek x domény, pro který platí $P(x)$)
  příklad: Nechť $P(x)$ je symbolický zápis pro ‚x je člověk a x je nesnesitelný'. Pak $\exists x P(x)$ reprezentuje výrok ‚někteří lidé jsou nesnesitelní'.

Kvantifikátory – vlastnosti, příklady

- Mějme konečnou doménu $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
  Pak $\forall x P(x)$ je zkratkou $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$
  a $\exists x P(x)$ je zkratkou $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$.
- univerzální kvantifikátor je zobecněním konjunkce a existenční je zobecněním disjunkce pro nekonečné domény
- příklady využití: mějme doménu přirozených čísel s nulou. Pak
  $\exists x(x < y)$ je unární predikát ‚číslo, pro které existuje menší číslo' (je ekvivalentní ‚y není 0'),

  $\forall x(x < x + 1)$ je sentence (výrok, nulární predikát) ‚každé číslo má svého následníka',

  $\forall x(\exists y(x < y))$ je sentence ‚pro každé číslo existuje větší číslo'

Formalizace jazyka predikátové logiky

- budeme se zabývat *predikátovou logikou 1. řádu s identitou a funkčními symboly*
- jazyk predikátové logiky: abeceda + pravidla pro správné tvoření termů a formulí

Abeceda:

- proměnné (nespecifikovaná jména objektů): $x, y, z, x_1, x_2 \dots$
- konstanty (vlastní jména objektů): $a, b, c, a_1, a_2 \dots$
- symboly pro spojky: $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- symboly pro kvantifikátory: $\forall, \exists$
- n-ární funkční symboly (složená jména objektů): $f, g, h, f_1, f_2 \dots$
- n-ární predikátové symboly: $P, Q, R, P_1, P_2 \dots$
- pomocné symboly: $(,)$

Termy

1. každá proměnná a každá konstanta je term
2. je-li f n-ární funkční symbol a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, \ldots, t_n)$ je term
3. nic jiného není term

- termy bez proměnných označujeme jako *uzavřené termy*
- příklady termů pro vybrané jazyky:
  - možné termy pro jediný binární funkční symbol $+$ (a žádnou konstantu):
    $x, x + x, x + y, x + (x + y), (x + y) + z, x + (y + z)$
  - binární funkční symboly $+, -$ a konstanta 0:
    $x, 0, x + y, y - x, x + (0 - y), (x + y) + z, x - (y + z)$
  - binární funkční symbol $+$ a unární $-$:
    $x, -x, x + (-y), (x + y) + z, (-x + (-y)) + z$

Formule

Atomická formule

1. je-li P n-ární predikátový symbol a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $P(t_1, \ldots, t_n)$ je atomická formule
2. jsou-li t_1 a t_2 termy, pak $t_1 = t_2$ je atomická formule
3. nic jiného není atomická formule

Formule

1. každá atomická formule je formule
2. je-li A formule, pak $\neg A$ je formule
3. jsou-li A, B formule, pak $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ jsou formule
4. je-li x proměnná a A formule, pak $(\forall x A)$ a $(\exists x A)$ jsou formule
5. nic jiného není formule

Poznámky k zavedenému formálnímu jazyku

- pro predikátovou logiku 1. řádu je charakteristické, že jediný přípustný typ proměnných jsou objektové (individuální) proměnné (a pouze ty lze vázat kvantifikátory). V logice druhého řádu jsou povoleny i predikátové proměnné.
- konkrétní volbou (konstant), funkčních a predikátových symbolů lze formulovat specifický jazyk, pro který budou jistě platit obecné logické principy. Navíc pro něj mohou platit v závislosti na vlastnostech zvolených prvků i jiné (mimologické) principy, které je ovšem třeba specifikovat pomocí axiomů nebo pravidel. Takový jazyk je pak označován jako *jazyk prvního řádu*.

  Příklad – jazyk elementární aritmetiky:

  zvolené symboly: konstanta 0, unární funkce následník s, binární $+, *$

  možné termy: $0, s(0), s(x), (x + y) * 0, (s(s(0)) + (x * y)) * s(0)$

  možné formule: $s(0) = (0 * x) + s(0), \exists x(y = x * z),$

  $$\forall x((x \neq 0) \Rightarrow \exists y(x = s(y)))$$

Vázaný a volný výskyt proměnných

- *podformule* formule A je libovolná spojitá podčást A, která je sama formulí
  Příklad: formule $A = \exists x((\forall y P(z)) \Rightarrow R(x,y))$ má kromě sebe samé následující podformule: $(\forall y P(z)) \Rightarrow R(x,y), \forall y P(z), R(x,y), P(z)$
- výskyt proměnné x ve formuli A je *vázaný*, pokud existuje podformule B formule A, která obsahuje tento výskyt x a začíná $\forall x$, resp. $\exists x$. Výskyt proměnné je *volný*, není-li vázaný.
  Příklad: výskyt proměnné x v předchozí formuli A je vázaný (hledanou podformulí je celá A), proměnné y a z jsou volné
- proměnná x se *volně vyskytuje* v A, má-li tam alespoň jeden volný výskyt
- *sentence* predikátové logiky je formule bez volných výskytů proměnných (všechny výskyty všech proměnných jsou vázané)
- *otevřená formule* je formule bez kvantifikátorů

Substituce proměnných

- ‚skutečnými proměnnými', za které lze dosadit (udělit jim hodnotu, provést substituci), jsou pouze volné proměnné
- term t je *substituovatelný* za proměnnou x ve formuli A, pokud pro každou proměnnou y obsaženou v t neobsahuje žádná podformule A tvaru $\forall yB$, $\exists yB$ volný výskyt proměnné x
- je-li t substituovatelný za x v A, označíme $A(x/t)$ výraz, který vznikne z A nahrazením každého volného výskytu x termem t
- příklad: ve formuli $A = \exists x P(x, y)$ je možné provést například následující substituce: $A(y/z) = \exists x P(x, z)$, $A(y/2) = \exists x P(x, 2)$, $A(y/f(z, z)) = \exists x P(x, f(z, z))$. Není však možné substituovat $A(y/f(x, x)) = \exists x P(x, f(x, x))$, protože by došlo k nežádoucí vazbě proměnných.

Reprezentace výrazů přirozeného jazyka

Příklad 1:

- věta: *Ne každý talentovaný spisovatel je slavný.*
- doména: všichni lidé; volba predikátových konstant:
  T – být talentovaný, S_1 – být spisovatel, S_2 – být slavný
- reprezentace v symbolickém jazyce: $\neg\forall x((T(x) \land S_1(x)) \Rightarrow S_2(x))$

Příklad 2:

- doména: libovolná individua, vyberme konstantu s reprezentující Sokrata
- zvolme C – být člověk, S – být smrtelný
- reprezentace vět z úvodního úsudku bude následující:
  $\forall x(C(x) \Rightarrow S(x))$ (*Každý člověk je smrtelný.*), $C(s)$ (*Sokrates je člověk.*),
  $S(s)$ (*Sokrates je smrtelný.*)

Poznámka: převod nemusí být vždy jednoznačný