8. Herbrand, unifikace, rezoluce v PL1

Příklad 1. Převeďte následující množiny formulí do Skolemovy prenexové normální formy a potom určete jejich Herbrandovo univerzum, bázi a model (pokud existuje):

a) $\{\forall x P(x) \wedge \neg \exists y P(y), P(a)\}$

b) $\{P(f(0)), R(0), \forall x(P(f(x)) \Rightarrow R(g(x))), \forall x(P(x) \Rightarrow P(f(f(x))))\}$

Řešení 1.

a) $\{\forall x P(x) \wedge \neg \exists y P(y), P(a)\}$
převedeme na
$S = \{P(x) \wedge \neg P(y), P(a)\}$
(univerzální kvantifikátory se nezapisují, ale všechny proměnné se považují za univerzálně kvantifikované)
$U(S) = \{a\}$
$B(S) = \{P(a)\}$
$M(S)$ neexistuje

b) $\{P(f(0)), R(0), \forall x(P(f(x)) \Rightarrow R(g(x))), \forall x(P(x) \Rightarrow P(f(f(x))))\}$
převedeme na
$S = \{P(f(0)), R(0), \neg P(f(x)) \vee R(g(x)), \neg P(x) \vee P(f(f(x)))\}$
$U(S) = \{0, f(0), g(0), f(f(0)), f(g(0)), g(f(0)), g(g(0)), f(f(f(0))), \ldots\}$
$B(S) = \{P(0), R(0), P(f(0)), R(f(0)), P(g(0)), R(g(0)), P(f(f(0))), \ldots\}$
$M(S) = \{P(f(0)), R(0), R(g(0)), P(f(f(f(0)))), R(g(f(f(0)))), \ldots\}$

Poznámka: modely se dobře vytvářejí induktivně na základě původních implikací. Zde se do modelu zařadí všechny prvky S bez proměnných a potom se přidávají další prvky na základě již zařazených tak, aby platnost implikací zůstala zachována.

Příklad 2. Najděte unifikátory následujících množin literálů (a, b, c jsou konstanty):

a) $\{P(x, f(y), z), P(g(a), f(w), u), P(v, f(b), c)\}$

b) $\{Q(h(x, y), w), Q(h(g(v), a), f(v)), Q(h(g(v), a), f(b))\}$

Řešení 2.

a) $\{x/g(a), v/g(a), y/b, w/b, z/c, u/c\}$

b) $\{x/g(b), y/a, w/f(b), v/b\}$

Rezoluce v predikátové logice: poznámky

- Přejmenování proměnných je někdy nutné: $\{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ je nesplnitelná množina klauzulí, ovšem literály $P(x)$ a $P(f(x))$ nejsou (dle našich pravidel) unifikovatelné.

- Unifikace více než dvou literálů před rezolvováním je někdy nutná. Množina klauzulí $\{\{\neg P(x), \neg P(y)\}, \{P(x), P(y)\}\}$ je nesplnitelná, ovšem pokud bychom neprovedli unifikaci všech literálů a nerezolvovali až takto unifikované množiny, nikdy bychom nedostali prázdnou klauzuli.

Příklad 3. Najděte všechny rezolventy následujících dvojic klauzulí:

a) $\{P(x,y), P(y,z)\}, \{\neg P(u, f(u))\}$

b) $\{P(x,x), \neg R(x, f(x))\}, \{R(x,y), Q(y,z)\}$

c) $\{P(x,y), \neg P(x,x), Q(x, f(x), z)\}, \{\neg Q(f(x), x, z), P(x,z)\}$

Řešení 3.

a) Přejmenování proměnných není v tomto případě nutné.

   Možnosti:

   - unifikovat množinu $\{P(x,y), P(y,z), P(u, f(u))\}$ . . . nelze!
   - unifikovat množinu $\{P(x,y), P(u, f(u))\}$ . . . $\sigma = \{x/u, y/f(u)\}$, rezolventa je $\{P(f(u), z)\}$
   - unifikovat množinu $\{P(y,z), P(u, f(u))\}$ . . . $\sigma = \{y/u, z/f(u)\}$, rezolventa je $\{P(x,u)\}$

Příklad 4. Dokažte pomocí rezoluce, že platí následující vyplývání:

a) $\{\forall x P(x,x), \forall x \forall y \forall z((P(x,y) \land P(y,z)) \Rightarrow P(z,x))\} \models \forall x \forall y (P(x,y) \Rightarrow P(y,x))$

b) $\{\forall x \forall y \forall z((P(x,y) \land P(y,z)) \Rightarrow P(x,z)), \forall x \forall y (P(x,y) \Rightarrow P(y,x))\} \models \forall x \forall y \forall z((P(x,y) \land P(z,y)) \Rightarrow P(x,z))$

Řešení 4. Všechny předpoklady a negaci závěru převedeme do prenexové konjunktivní normální formy, provedeme Skolemizaci a pomocí rezoluce dokazujeme nesplnitelnost takto vzniklé množiny klauzulí.

a) $\{\{P(x,x)\}, \{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(z,x)\}, \{P(a,b)\}, \{\neg P(b,a)\}\}$

b) $\{\{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(x,z)\}, \{\neg P(x,y), P(y,x)\}, \{P(a,b)\}, \{P(c,b)\}, \{\neg P(a,c)\}\}$