6. Predikátová logika, manipulace s formulemi

Příklad 1. Převeďte následující věty v přirozeném jazyce do formulí v predikátové logice:

a) Někteří studenti nemají hudební nadání.

b) Někteří přítomní bydlí v hotelu.

c) Někteří studenti nejsou ani nadaní ani pilní.

d) Každé číslo dělitelné 8 je dělitelné 4.

e) Kdo seje vítr, ten sklízí bouři.

f) Psi, kteří hodně štěkají, nekoušou.

g) Žádný tyran není spravedlivý.

h) Každý člověk má otce a matku.

i) Každý, kdo má otce, má i matku.

j) Každý člověk je mladší než jeho rodiče. (pomocí termů)

k) Žádný dobrý učitel nikoho zbytečně nepotrestal.

l) Někdo má rád každého.

m) Někdo má rád ostatní.

n) Není všechno zlato, co se třpytí.

o) Všichni sourozenci mají stejného otce. (pomocí termů)

Řešení 1.

a) $\exists x(S(x) \land \neg H(x))$ kde $S(x)$ znamená „x je student“, $H(x)$ znamená „x má hudební nadání“.

b) $\exists x(P(x) \land H(x))$

c) $\exists x(S(x) \land \neg N(x) \land \neg P(x))$

d) $\forall x(D(x, 8) \Rightarrow D(x, 4))$

e) jedno možné řešení: $\forall x(V(x) \Rightarrow B(x))$, kde $V(x)$ znamená „x seje vítr“ a $B(x)$ znamená „x sklízí bouři“ druhé možné řešení: $\forall x(Seje(x, vitr) \Rightarrow Sklizi(x, boure))$, kde „vitr“ a „boure“ jsou konstanty

f) $\forall x((P(x) \land S(x)) \Rightarrow \neg K(x))$

g) $\forall x(T(x) \Rightarrow \neg S(x))$, což je ekvivalentní formuli $\neg\exists x(T(x) \land S(x))$

h) $\forall x(C(x) \Rightarrow ((\exists y M(x, y)) \land (\exists z O(x, z))))$

i) $\forall x((C(x) \land (\exists y O(x, y))) \Rightarrow (\exists z M(x, z)))$

j) $\forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow Vetsi(vek(x), vek(y)))$, přičemž predikát $Vetsi$ se obvykle zapisuje infixovou notací, tedy v našem případě bychom napsali $vek(x) > vek(y)$

k) $\neg \exists x (U(x) \wedge D(x) \wedge (\exists y ZbyPot(x,y)))$

l) $\exists x \forall y R(x,y)$

m) $\exists x \forall y (x \neq y \Rightarrow R(x,y))$

n) $\neg \forall x (T(x) \Rightarrow Z(x))$

o) $\forall x \forall y (S(x,y) \Rightarrow otec(x) = otec(y))$

Příklad 2. Nechť výraz $P(l,e,t)$ znamená ,,Luboš půjčuje Evě tužku“. Zapište symbolicky následující výroky:

a) Někdo půjčuje Evě tužku.

b) Eva půjčuje někomu tužku.

c) Eva někomu něco půjčuje.

d) Někdo Evě něco půjčuje.

e) Luboš každému něco půjčuje.

f) Někdo někomu něco půjčuje.

g) Každý někomu něco půjčuje.

h) Někdo každému všechno půjčuje.

i) Někdo nikomu nic nepůjčuje.

j) Neexistuje člověk, který každému všechno půjčuje.

k) Všichni všechno všem půjčují.

Řešení 2.

a) $\exists x P(x,e,t)$

b) $\exists x P(e,x,t)$

c) $\exists x \exists y P(e,x,y)$

d) $\exists x \exists y P(x,e,y)$

e) $\forall x \exists y P(l,x,y)$

f) $\exists x \exists y \exists z P(x,y,z)$

g) $\forall x \exists y \exists z P(x,y,z)$

h) $\exists x \forall y \forall z P(x,y,z)$

i) $\exists x \neg (\exists y \exists z P(x,y,z))$

j) $\neg (\exists x \forall y \forall z P(x,y,z))$

k) $\forall x \forall y \forall z P(x,y,z)$

Příklad 3. Nechť $V(p,t)$ znamená „vidím předmět p v okamžiku t". Zapište symbolicky věty:

a) V každém okamžiku něco vidím.

b) V některém okamžiku nevidím nic.

c) Existují předměty, které nevidím v žádném okamžiku.

d) Každou věc vidím v některém okamžiku.

Řešení 3.

a) $\forall x \exists y V(y,x)$

b) $\exists x \neg \exists y V(y,x)$ nebo $\exists x \forall y \neg V(y,x)$ (ekvivalentní zápis)

c) $\exists y \neg \exists x V(y,x)$ nebo $\exists y \forall x \neg V(y,x)$

d) $\forall y \exists x V(y,x)$

Příklad 4. Najděte negace formulí:

a) $\exists x((P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x))$

b) $\forall x(P(x) \Rightarrow \forall y Q(y))$

c) $\forall x(P(x) \vee \exists y Q(y))$

d) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x(R(x) \wedge S(x))$

Řešení 4.

a) $\neg(\exists x((P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x))) \Leftrightarrow$
$\forall x \neg((P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x))) \Leftrightarrow$
$\forall x((\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg R(x))$

b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y \neg Q(y))$

c) $\exists x(\neg P(x) \wedge \forall y \neg Q(y))$

d) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \forall x(\neg R(x) \vee \neg S(x))$

Příklad 5. Určete, pro které interpretace jsou pravdivé následující formule:

a) $\exists x \forall y(P(y) \Rightarrow (x = y))$

b) $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow (x = y)))$

c) $\forall x \exists y \exists z(((x = y) \vee (x = z)) \wedge (y \neq z))$

d) $\forall x \exists y Q(x,y) \Rightarrow \exists x Q(x,x)$

e) $\exists x \forall y((R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \Rightarrow (R(x,x) \Leftrightarrow R(y,y)))$

Řešení 5.

a) Formule je pravdivá v každé interpretaci s libovolným neprázdným oborem interpretace **D** a s libovolným přiřazením unárního predikátu nad **D** predikátové konstantě P, pokud $P(d)$ je pravda nejvýše pro jeden případ.

b) Formule je pravdivá v každé interpretaci s libovolným oborem interpretace **D** a s libovolným přiřazením unárního predikátu nad **D** predikátové konstantě P, pokud $P(d)$ je pravda právě v jednom případě.

c) Formule nabývá hodnoty pravda pro každý obor interpretace **D**, který je prázdný, nebo obsahuje alespoň dva prvky.

d) Formule je pravdivá v každé interpretaci s libovolným neprázdným oborem interpretace **D** a s libovolným přiřazením binárního predikátu nad **D** predikátové konstantě Q, pokud $Q(x, y)$ má alespoň jeden reflexivní prvek nebo pokud pro některý prvek a z D neexistuje prvek b takový, že $Q(a, b)$.

e) Formule je pravdivá v každé interpretaci s libovolným neprázdným oborem interpretace **D** a s libovolným přiřazením binárního predikátu nad **D** predikátové konstantě R, pokud existuje prvek x,

- který je reflexivní a všechny prvky s ním asymetrické v R jsou také reflexivní, nebo
- který není reflexivní a všechny prvky s ním asymetrické v R také nejsou reflexivní.

(Všimněte si, že v uvedených bodech je zahrnuta i situace, kdy levá strana implikace je nepravdivá.)

Příklad 6. Určete, zda jsou následující formule tautologiemi:

a) $\forall x(P(x) \land Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x P(x) \land \forall x Q(x))$

b) $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x P(x) \lor \exists x Q(x))$

c) $\forall x(A(x) \lor B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x) \lor \forall x B(x))$

d) $\forall x \forall y R(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x R(x, y)$

e) $(\exists x A(x) \land \exists x B(x)) \Rightarrow \exists x(A(x) \land B(x))$

f) $(\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$

Řešení 6. Zdůvodnění, že se nejedná o tautologii, lze provést např. nalezením protipříkladu.

a) Abychom dokázali, že se jedná o tautologii, je potřeba ukázat, že platí implikace zleva doprava i obráceně:

„⇒“ Implikace neplatí pouze tehdy, je-li antecedent pravdivý a konsekvent nepravdivý. Ukážeme, že tento případ pro žádnou interpretaci nemůže nastat. Pokud platí antecedent, musí pro každý prvek d oboru interpretace platit $P(d)$ a zároveň $Q(d)$, tedy platí $\forall x(P(x) \land Q(x))$. Potom ale také za stejných podmínek platí $P(d) \land Q(d)$ a také celá formule $\forall x P(x) \land \forall x Q(x)$ konsekventu;

„$\Leftarrow$“ Na druhou stranu, platí-li $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$, tj. pro každé d platí $P(d)$ a zároveň pro každé d platí $Q(d)$, potom také platí $P(d) \wedge Q(d)$ a tedy také $\forall x(P(d) \wedge Q(d))$.

Ukázali jsme, že pro libovolnou interpretaci platí obě implikace, tedy platí i ekvivalence a tedy celá formule.

b) Důkaz provedeme obdobným způsobem jako v předchozím případě.

c) Protipříklad: Mějme doménu celých čísel, kde $A(x)$ je pravda pro lichá čísla a nepravda pro sudá čísla, $B(x)$ je pravda pro sudá čísla a nepravda pro lichá čísla. Potom $\forall x(A(x) \vee B(x))$ je pravda, ale $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ ne.

d) Opět je potřeba dokázat, že platí obě implikace. Protože se pro všeobecný kvantifikátor jedná o zobecněnou konjunkci, přičemž je konjunkce komutativní, a oba kvatifikátory jsou stejné kvantity, můžeme je zaměnit.

e) Protipříklad: Mějme doménu, kde $A(x)$ je pravda právě pro jeden její prvek a a $B(x)$ je pravda právě pro jeden její prvek b různý od a. Potom $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ je pravda, ale $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ ne. Např. $D = \{1, 2\}, A = \{1\}, B = \{2\}$.

f) Protipříklad: Mějme doménu, kde pro nějakou konstantu a je $P(x)$ pravda a $Q(x)$ nepravda a navíc pro nějakou hodnotu $P(x)$ je nepravda. Potom $\forall x P(x)$ je nepravda a tedy $\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)$ je pravda. Dále pro $x = a$ je $P(x) \Rightarrow Q(x)$ nepravda, tedy i $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ je nepravda. Máme tedy $1 \Rightarrow 0$, což je nepravda.