# 4. Úplné systémy spojek, rezoluce ve výrok. logice

**Příklad 1.** Dokažte, že následující množiny tvoří úplný systém spojek:

a) $\{NOR\}$

b) $\{NAND\}$

**Řešení 1.** Dokazujeme, že libovolnou pravdivostní funkci lze reprezentovat formulí obsahující pouze $NOR$.
Nejprve vytvoříme pro danou funkci formuli v UKNF (neexistuje-li, použijeme formuli reprezentující tautologii). Před tuto formuli dáme dvojí negaci a vypropagujeme jednu negaci dovnitř, pouze do jedné úrovně. Získáme tak formuli obsahující pouze disjunkce a negace. Postupujeme od vnitřních výrazů, vhodně závorkujeme a nahrazujeme výrazy s negacemi a disjunkcemi ekvivalentními výrazy s $NOR$ (tj. $\neg A$ za $A\ NOR\ A$, $A \vee B$ za $(A\ NOR\ B)\ NOR\ (A\ NOR\ B)$).

Další zadání analogicky přes UDNF.

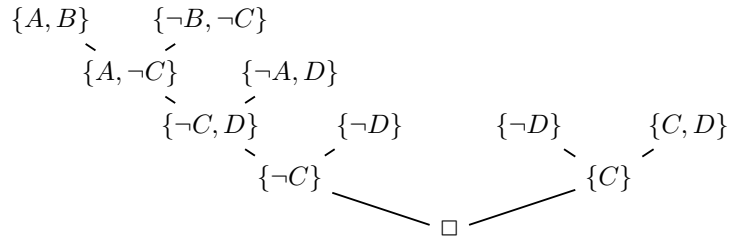
**Příklad 2.** Pomocí rezoluce ukažte, že platí logické vyplývání:

- $\neg p \vee q, \neg r \Rightarrow \neg q \models p \Rightarrow r$

**Řešení 2.** Závěr znegujeme, přidáme k předpokladům, převedeme na množinu klauzulí a pomocí rezoluce ukážeme nesplnitelnost.

**Příklad 3.** Vyvraťte následující množinu formulí pomocí obecné rezoluce:
$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee D) \wedge (\neg D) \wedge (C \vee D)$

**Řešení 3.**

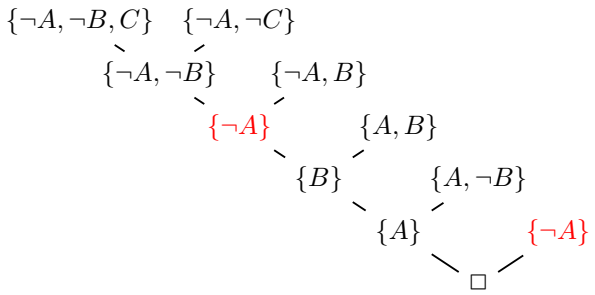



**Příklad 4.** Pomocí lineární rezoluce ukažte, že následující formule je nesplnitelná (vytvořte alespoň dva různé důkazy):

- $S = (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (A \vee C)$

Lineární rezoluce: posloupnost $< C_0, B_0 >, \ldots, < C_n, B_n >$, kde:
$C_0 \in S \wedge (B_i \in S \vee B_i = C_j, j < i)$
$C_{i+1}$ je rezolventa $C_i$ a $B_i$
$C_{n+1} = []$

**Řešení 4.**




**Příklad 5.** Pomocí LI rezoluce ukažte, že následující formule je nesplnitelná:
$S = (q \vee \neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (s \vee \neg r) \wedge (r) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

LI (lineární vstupní) rezoluce $S = P \cup \{G\}$
$< G_0, C_0 >, \ldots, < G_n, C_n >$, kde:
$G_0 = G \wedge \forall i : C_i \in P$ (takže $\forall i : G_i$ obsahuje pouze negativní)
$G_{i+1}$ je rezezolventa $G_i$ a $C_i$
$G_{n+1} = []$

**Řešení 5.** Zápis formule v množinovém tvaru: $\{\{q, \neg p, \neg r, \neg s\}, \{p, \neg r, \neg s\}, \{s, \neg r\}, \{r\}\} \cup \{\{\neg p, \neg q\}\}$