3. Konjunktivní a disjunktivní NF, využití

Příklad 1. Vyjádřete pomocí pravdivostní tabulky následující formule v disjunktivní normální formě:

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

b) $(p \Leftrightarrow q) \vee \neg r$

Řešení 1.

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Závěr: (úplná) disjunktivní normální forma formule je
$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

b) $(p \Leftrightarrow q) \vee \neg r$

p	q	r	$(p$	$\Leftrightarrow$	$q)$	$\vee$	$\neg$	r
1	1	1		1		1		
1	1	0		1		1		
1	0	1		0		0		
1	0	0		0		1		
0	1	1		0		0		
0	1	0		0		1		
0	0	1		1		1		
0	0	0		1		1		

Závěr: (úplná) disjunktivní normální forma formule je
$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

Příklad 2. Vyjádřete pomocí pravdivostní tabulky následující formule v konjunktivní normální formě:

a) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \wedge r)$

b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

Řešení 2.

a) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \wedge r)$

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p \wedge r$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \wedge r)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

Závěr: (úplná) konjunktivní normální forma formule je
$(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

p	q	r	$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\Rightarrow$	r
1	1	1		1		1	
1	1	0		1		0	
1	0	1		0		1	
1	0	0		0		1	
0	1	1		1		1	
0	1	0		1		0	
0	0	1		1		1	
0	0	0		1		0	

Závěr: (úplná) konjunktivní normální forma formule je
$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$

Poznámka: Některé formule jsou zároveň v disjunktivní i konjunktivní normální formě, například $p \vee q \vee \neg r$ nebo $\neg p \wedge q$ nebo třeba $\neg r$.

Poznámka: Každá formule má nějakou odpovídající DNF a CNF, tyto normální formy však nejsou určeny jednoznačně. Například CNF formule $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)$ může být $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)$, ale stejně tak i $(\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

Příklad 3. Vyjádřete pomocí ekvivalentních úprav následující formule v disjunktivní normální formě:

a) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (r \vee s)$

b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

Řešení 3. Ekvivalence a implikace nahrazujeme disjunkcemi, konjunkcemi a negacemi, pak uplatníme de Morganova pravidla, asociativitu a distributivitu.

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Rightarrow (r \vee s)$$

$$\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee (r \vee s)$$

$$\vdots$$

$$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r \vee s$$

Další zadání analogicky.

Příklad 4. Vyjádřete pomocí ekvivalentních úprav následující formule v konjunktivní normální formě:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$

b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

Řešení 4.

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \wedge ((p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q))$$

$$(\neg(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \wedge (\neg(p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow q))$$

$$((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r)) \wedge ((p \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee q))$$

$$(((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee r) \wedge (((p \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg p)) \vee q)$$

$$\vdots$$

$$(\neg q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee q)$$

Další zadání analogicky.

Příklad 5. Stanovte všechny vzájemně neekvivalentní logické důsledky premis (v úplné konjunktivní normální formě), ve kterých se vyskytují pouze výrokové symboly obsažené v premisách:

a) $T \equiv \{p \vee (q \wedge r), p \Rightarrow r\}$

b) $T \equiv \{p \Rightarrow (q \vee r), r \Rightarrow q\}$

c) $T \equiv \{p \Rightarrow (q \Rightarrow p), r \Rightarrow \neg p\}$

d) $T \equiv \{p \vee q, p \Rightarrow r\}$

Řešení 5.

a) Nejdříve nalezneme UKNF množiny T (tj. konjunkce všech jejích prvků):

p	q	r	p	$\vee$	$(q \wedge r)$	p	$\Rightarrow$	r	T
0	0	0		0	0		1		0
0	0	1		0	0		1		0
0	1	0		0	0		1		0
0	1	1		1	1		1		1
1	0	0		1	0		0		0
1	0	1		1	0		1		1
1	1	0		1	0		0		0
1	1	1		1	1		1		1

UKNF množiny T je tedy:
$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

Nyní budeme hledat takové formule ϕ, pro které platí $T \models \phi$, tj. na základě *věty o konjunkci* jsou konjunkcemi elementárních disjunkcí obsažených v uvedené UKNF.

(Intuitivně: budeme hledat všechny neprázdné podmnožiny elementárních disjunkcí dané UKNF. Tyto podmnožiny chápeme jako konjunkce svých prvků.)

$$
\begin{aligned}
T &\models (p \vee q \vee r)\\
T &\models (p \vee q \vee \neg r)\\
T &\models (p \vee \neg q \vee r)\\
T &\models (\neg p \vee q \vee r)\\
T &\models (\neg p \vee \neg q \vee r)\\
T &\models (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)\\
T &\models (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)\\
T &\models (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)\\
T &\models (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)\\
T &\models (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)\\
T &\models (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)\\
T &\models (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)\\
&\vdots\\
T &\models (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge\\
&\quad \wedge(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)
\end{aligned}
$$

Poznámka: Pokud v zadání není explicitně řečeno, že důsledky mají být v úplné konjunktivní normální formě, je potřeba navíc uvést jako důsledek nějakou tautologii (zde např. $p \vee \neg p$). Tautologie nemají UKNF, takže uvedeným postupem je nelze získat, ale jsou důsledkem libovolné množiny premis.
Úloha obecně může být formulována tak, že nepracuje s UKNF, např. „rozhodněte, zda množina $\{p \Leftrightarrow q, p \Rightarrow q, q \Rightarrow p, p \Rightarrow p\}$ obsahuje všechny vzájemně neekvivalentní důsledky formule $\varphi = p \Leftrightarrow q$ (obsahující pouze symboly z φ)“.

Příklad 6. Najděte všechny vzájemně neekvivalentní premisy (v úplné konjunktivní normální formě) dané formule ϕ, ve kterých se vyskytují pouze výrokové symboly obsažené ve formuli ϕ:

a) $\phi \equiv \neg(p \wedge q)$

b) $\phi \equiv p \vee \neg q$

c) $\phi \equiv p \Leftrightarrow q$

d) $\phi \equiv p \Rightarrow [(q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)]$

Řešení 6.

a) formuli $\phi \equiv \neg(p \wedge q)$ převedeme do úplné konjuktivní normalní formy a najdeme všechny elementární disjunkce, které se v dané UKNF nevyskytují a všechny jejich podmnožiny přidáváme k této UKNF.

UKNF: $\neg p \vee \neg q$

Doplněk: $p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee q$

$$\begin{aligned}
\neg p \vee \neg q &\models \neg p \vee \neg q \\
p \vee q, \neg p \vee \neg q &\models \neg p \vee \neg q \\
p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q &\models \neg p \vee \neg q \\
\neg p \vee q, \neg p \vee \neg q &\models \neg p \vee \neg q \\
p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q &\models \neg p \vee \neg q \\
p \vee q, \neg p \vee q, \neg p \vee \neg q &\models \neg p \vee \neg q \\
p \vee \neg q, \neg p \vee q, \neg p \vee \neg q &\models \neg p \vee \neg q \\
p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee q, \neg p \vee \neg q &\models \neg p \vee \neg q
\end{aligned}$$