2. Splnitelnost, vyplývání, tautologie, úsudky

Příklad 1. Ověřte splnitelnost množiny formulí

a) $\mathbf{T} = \{(p \Rightarrow q) \wedge r, q \wedge r, r \Rightarrow s, p \wedge \neg s\}$

b) $\mathbf{F} = \{(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow [(s \wedge \neg t) \vee (\neg s \wedge t)], q \wedge r, \neg s, \neg t, p\}$

c) $\mathbf{G} = \{q \Rightarrow r, r \Rightarrow p, q \Rightarrow p\}$

d) $\mathbf{Y} = \{q \Rightarrow r, r \Rightarrow p, \neg(q \Rightarrow p)\}$

e) $\mathbf{Z} = \{(p \vee q) \Leftrightarrow r, r, \neg p, q\}$

Řešení 1.

a) Množina formulí **T** je nesplnitelná. Můžeme vytvořit pravdivostní tabulku a ukázat, že konjunkce všech prvků množiny je vždy nepravdivá (splnitelnost množiny formulí je totéž jako splnitelnost formule představující konjunkci všech jejích prvků).
Pro větší počet pravdivostních proměnných jsou tabulky rozsáhlé a nepřehledné, je tedy vhodné nejprve fixovat interpretace těch proměnných, u kterých jsou ze zadání zcela zřejmé (zejména se budeme zajímat o prvky množiny v podobě samostatných proměnných, jejich negací a jednoduchých konjunkcí). Každý prvek množiny musí být pravdivý, tedy i formule $q \wedge r$, přičemž jediná možná interpretace zajišťující pravdivost je $I(q) = 1, I(r) = 1$. Dále $p \wedge \neg s$ musí být pravdivá, nutno tedy interpretovat $I(p) = 1, I(s) = 0$. Máme již kompletní a jedinou interpretaci, která splňuje dvě ze čtyř formulí v množině. Pro ostatní prvky (formule) zjistíme jejich pravdivost v této interpretaci. Pokud je alespoň jedna nepravdivá (zde $r \Rightarrow s$), množina je nesplnitelná.

b) množina formulí je nesplnitelná

c) Množina formulí je splnitelná. Můžeme opět zkonstruovat tabulku, stačí ale najít alespoň jednu interpretaci, pro kterou jsou všechny prvky pravdivé (zde evidentně $I(p) = 1, I(q) = 1, I(r) = 1$).

d) množina formulí je nesplnitelná

e) množina formulí je splnitelná

Příklad 2. Zjistěte, zda platí logické vyplývání, tedy zda platí $\mathbf{T} \models \phi$:

a) $\mathbf{T} = \{(p \Rightarrow q) \wedge r, q \wedge r, r \Rightarrow s\}$, $\phi = \neg(p \wedge \neg s)$ (srovnejte s předchozím příkladem)

b) $\mathbf{T} = \{(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow [(s \wedge \neg t) \vee (\neg s \wedge t)], q \wedge r, \neg s, \neg t\}$, $\phi = \neg p$ (srovnejte s předchozím příkladem)

c) $\mathbf{T} = \{p \wedge q, \neg p \Rightarrow q\}$, $\phi = q$

d) $\mathbf{T} = \{p \Rightarrow q, \neg q \Rightarrow \neg r\}$, $\phi = r \Leftrightarrow p$

e) $\mathbf{T} = \{p \Rightarrow q, \neg r \Rightarrow \neg q\}$, $\phi = \neg r \Rightarrow \neg p$

Řešení 2.

a) Ukážeme, že formule ϕ logicky vyplývá z množiny formulí $\mathbf{T}$, tzn. každý model $\mathbf{T}$ je i modelem ϕ (tj. na každém řádku tabulky, kde mají všechny prvky $\mathbf{T}$ jedničku, musí mít i ϕ jedničku).
Mohli bychom zkonstruovat celou pravdivostní tabulku (16+1 řádků), stačí se ale zaměřit na řádky, které představují modely $\mathbf{T}$.
Nejdříve využijeme dříve zmíněnou fixaci interpretací (zde pro $q \wedge r$ zřejmě $I(q) = 1, I(r) = 1$; v tabulce již není potřeba $q \wedge r$ uvádět a q, r mají vždy jedničku). Řádky, na nichž se pro některý prvek z $\mathbf{T}$ objeví nula, se přestaneme zabývat (protože nepředstavují modely $\mathbf{T}$).

q	r	p	s	$(p \Rightarrow q)$	$\wedge$	r	$r \Rightarrow s$	$\neg(p \wedge \neg s)$
1	1	1	1		1		1	1
1	1	1	0		1		0	
1	1	0	1		1		1	1
1	1	0	0		1		0	

Logické vyplývání platí, protože vždy, když jsou pravdivé všechny předpoklady (prvky $\mathbf{T}$), je pravdivý i závěr (formule ϕ).

b) logické vyplývání platí

c) logické vyplývání platí

d) logické vyplývání neplatí

e) logické vyplývání platí

Příklad 3. Ověřte, zda následující formule jsou tautologie, a to bez použití pravdivostních tabulek:

a) $\phi \equiv [\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)] \Rightarrow p$

b) $\phi \equiv p \Rightarrow [q \Rightarrow (\neg p \Rightarrow r)]$

c) $\phi \equiv [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

d) $\phi \equiv p \Rightarrow \neg[(q \wedge p) \Rightarrow p]$

e) $\phi \equiv (p \Rightarrow p) \Rightarrow [p \wedge \neg(q \Rightarrow p)]$

Řešení 3.

a) Formule je tautologie (tj. je pravdivá pro libovolnou interpretaci). Jedná se o implikaci, která může být nepravdivá pouze v jediném případě, kdy má pravdivý předpoklad a nepravdivý závěr. Schématicky ukážeme, že taková situace nemůže nastat (vede ke sporu).

$\phi \equiv [\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)] \Rightarrow p$

$[\neg p$	$\Rightarrow$	$(q$	$\wedge$	$\neg q)]$	$\Rightarrow$	p
	1					0
1			0			
	0					

b) formule je tautologie

c) formule není tautologie

d) formule není tautologie

e) formule je kontradikce

Příklad 4. Převeďte do symolického jazyka a ověřte platnost úsudků:

a) „Nebeží-li motor, je vada v motoru nebo nejde proud.“
„Je-li vada v motoru, je třeba volat opraváře.“
„Proud jde.“

s důsledkem: „Nebeží-li motor, je třeba volat opraváře.“

b) „Není pravda, že uchazeč umí anglicky i německy.“
„Uchazeč neumí anglicky.“

s důsledkem: „Uchazeč neumí německy.“

c) „Je-li pan X otcem Jirky a má krevní skupinu A a také Jirkova matka má skupinu A, pak Jirka má některou z krevních skupin A nebo 0.“
„Pan X i Jirkova matka mají krevní skupinu A.“
„Jirka nemá krevní skupinu A.“
„Jirka nemá krevní skupinu 0.“

s důsledkem: „Pan X není otcem Jirky.“

d) „Jestliže studuji, dosáhnu dobrého postavení.“
„Jestliže nestuduji, užívám si.“

s důsledkem: „Buď dosáhnu dobrého postavení, nebo si užívám.“

Řešení 4.

a) úsudek je platný

b) úsudek není platný

c) úsudek je platný

d) úsudek není platný

Příklad 5. Formuli $p \Leftrightarrow q$ vyjádřete v úplné konjunktivní i disjunktivní normální formě.

Řešení 5.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

úplná konjunktivní normální forma: $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
úplná disjunktivní normální forma: $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$