Příklady pro získání zápočtu z IB107 Vyčíslitelnost a složitost

K získání zápočtu je třeba získat celkem 8 bodů. Každý zcela vyřešený příklad má hodnotu tří bodů a za účast na každém ze 6 cvičení bylo možné získat 1 bod, tj. celkem bylo možné získat až 15 bodů.

1. Nechť C je množina tří barev, např. červená, zelená a modrá, a uvažte následující rozhodovací problém. Vstupem je graf G a přiřazení dvou- a tříprvkových podmnožin $C_v \subseteq C$ jeho vrcholům. Vstup je přijímán, pokud existuje přiřazení barev vrcholům grafu G takové, že barva vrcholu v patří do množiny C_v a žádné dva vrcholy spojené hranou nemají přiřazenu stejnou barvu. Dokažte, že tento rozhodovací problém je NP-úplný.

2. Graf funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je množina $\{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{N} \text{ a } f(x) \neq \perp\} \subseteq \mathbb{N}^2$. Dokažte, že funkce f je totálně vyčíslitelná *právě tehdy, když* $f(x)$ je definováno pro každé $x \in \mathbb{N}$ a její graf je rekurzivně spočetná množina.

3. Nechť I je množina těch $i \in \mathbb{N}$, že funkce φ_i je prostá enumerace všech prvočísel, tj., φ_i je totálně vyčíslitelná, prostá a obor jejich hodnot jsou přesně všechna prvočísla. Rozhodněte, zda množina I je rekurzivně spočetná a zda její doplněk $\overline{I}$ je rekurzivně spočetný, a svou odpověď podrobně zdůvodněte.

Řešení odevzdávajte v odevzdávárně informačního systému jako pdf soubory zpracované vhodným textovým procesorem (např. TeXem), tedy nikoliv psaná rukou, z důvodu čitelnosti a to do konce ledna 2020. Řešení každého příkladu lze odevzdat maximálně dvakrát, tj. jednou opravit. Vaše řešení musí obsahovat citaci všech zdrojů, včetně webových zdrojů, které jste využili. Počítejte, že kontrola řešení může trvat až jeden týden.

Splnění podmínek pro získání zápočtu je nutnou podmínkou ke konání zkoušky z předmětu a je nutné, aby bylo zaevidováno v ISu dva dny před zkouškovým termínem.