TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Bachelorarbeit

Operationen zwischen geordneten Graphenklassen

Johanna Stumpf

18. März 2013

Betreuer: Dr. Achim Blumensath

Inhaltsverzeichnis

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Quellen erstellt habe.

Darmstadt, den 18. März 2013

Johanna Stumpf

Einleitung

Betrachtet man die Ausdrucksstärke verschiedener Logiken auf Graphen, so macht es einen Unterschied, ob sich auf diesen Graphen eine Ordnung definieren lässt oder nicht. Beispielsweise kann die Eigenschaft, dass ein Graph eine gerade Anzahl von Knoten hat, nicht in MSO ausgedrückt werden. Ist die Menge der Knoten aber geordnet, so kann man eine entsprechende MSO-Formel formulieren. Es zeigt sich also, dass die Ausdrucksstärke einer Logik auf geordneten Graphen größer ist.

Um Resultate, die für gewisse Graphen gezeigt wurden, auf weitere Graphenklassen übertragen zu können, stellt sich die Frage, unter welchen Operationen die Möglichkeit, eine Klasse von Graphen zu ordnen, erhalten bleibt. Dies wird in der vorliegenden Arbeit für verschiedene Logiken betrachtet.

Im folgenden Kapitel werden Graphen und die betrachteten Logiken vorgestellt und es wird definiert, was eine Ordnung auf einem Graphen ist.

Im Anschluss werden bekannte Ergebnisse von Blumensath und Courcelle [2] zusammengefasst. Hierbei handelt es sich um kombinatorische Bedingungen für die Möglichkeit einen Graphen mit einer GSO-Formel oder MSO-Formel zu ordnen.

Der Hauptteil der Arbeit beschäftigt sich damit zu überprüfen, welche Schlussfolgerungen man aus der Möglichkeit, eine Klasse von Graphen zu ordnen, für die Ergebnisse verschiedener Operationen auf diesen Graphen ziehen kann. Die betrachteten Operationen sind Interpretation, disjunkte Vereinigung, Produkt, Quotient und Muchnik-Iteration.

Eine Interpretation erzeugt einen neuen Graphen innerhalb eines gegebenen, indem durch Formeln neue Relationen definiert werden. Es wird gezeigt, dass sich FO- und MSO-Formeln in der Interpretation eines Graphen auf FO- und MSO-Formeln im ursprünglichen Graphen relativieren lassen. Mittels dieser Erkenntnis wird dann ein Zusammenhang hergestellt zwischen der Möglichkeit, die Interpretation einer Klasse von Graphen zu ordnen, und der Möglichkeit, die ursprüngliche Klasse zu ordnen.

Die Vereinigung zweier Graphen ist der Graph, der alle Elemente beider Graphen enthält. Mit Hilfe des Kompositionssatzes aus [1, Theorem 3.10] wird gezeigt, dass sich Klassen von Graphen genau dann FO-, MSO- oder GSO-ordnen lassen, wenn ihre disjunkte Vereinigung sich ordnen lässt.

Mit dem Produkt zweier Graphen wird der Graph bezeichnet, der als Knotenmenge das kartesische Produkt der Knotenmengen der ursprünglichen Graphen enthält. Es wird gezeigt, dass Klassen von Graphen sich genau dann FO-ordnen lassen, wenn sich ihr Produkt FO-ordnen lässt.

Im Quotienten werden Elemente des Graphen zusammengefasst, die bezüglich einer Kongruenzrelation äquivalent sind. Es wird sich zeigen, dass sich aus der Möglichkeit, eine Klasse von Graphen zu ordnen, auch die Möglichkeit, den Quotienten zu ordnen, ergibt.

Die Muchnik-Iteration eines Graphen besteht aus unendlich vielen Kopien dieses Graphen, die baumartig angeordnet sind. Es wird gezeigt, dass eine Klasse von Graphen genau dann MSO-geordnet werden kann, wenn die Muchnik-Iteration MSO-geordnet werden kann.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Dr. Achim Blumensath, der mir bei auftretenden Problemen stets geduldig geholfen und sich viel Zeit dafür genommen hat, inhaltliche Fragen zu klären. Desweiteren danke ich Jerome Alex, der mir durch seine LaTeX- Kenntnisse und Korrekturen bei der Fertigstellung der Arbeit geholfen hat.

1 Grundlegende Definitionen

Zu Beginn werden die grundlegenden Begriffe zum Thema Graphen eingeführt sowie die betrachteten Logiken vorgestellt. Zudem wird erklärt, wie Ordnungen auf Graphen und Graphenklassen definiert sind.

1.1 Graphen

Im Folgenden betrachten wir Klassen von Graphen. Die Graphen sind dabei einfach, schleifenfrei und ungerichtet. Ein Graph $G = \langle V, E \rangle$ ist eine Struktur bestehend aus einer Knotenmenge V und einer Kantenrelation E. Eine Kante zwischen zwei Knoten u, v wird mit (u, v) bezeichnet. Ein gefärbter Graph $G = \langle V, (E_i)_{i \in I}, (P_j)_{j \in J} \rangle$ besteht aus Knoten V, unterschiedlich gefärbten Kanten E_i und einstelligen Relationen P_j, die die Färbung der Knoten festlegen. Der Inzidenzgraph eines gefärbten Graphen G ist gegeben durch $\mathrm{Inc}(G) := \langle V \cup E, I, (Q_i)_{i \in I}, P', (P_j)_{j \in J} \rangle$, wobei die Kantenrelation $I := \{(x, y) \mid x \text{ ist Endpunkt von } y \text{ oder } y \text{ ist Endpunkt von } x\}$ die symmetrische Version der Inzidenzrelation ist. Die einstellige Relation Q_i bestimmt die Färbung der Elemente aus E, P' ist eine einstellige Relation, welche die Knoten identifiziert, und P_j legt die Färbung der Knoten fest.

1.2 Logiken

Es werden Logik erster Stufe (FO), monadische Logik zweiter Stufe (MSO) und bewachte Logik zweiter Stufe (GSO) betrachtet. Monadische Logik zweiter Stufe ist eine Erweiterung der Logik erster Stufe, bei der Variablen für Mengen von Knoten sowie Quantoren für diese Variablen hinzugefügt werden. Bewachte Logik zweiter Stufe ist eine Variante der monadischen Logik zweiter Stufe, bei der nicht nur über Knotenmengen sondern auch über Mengen von Kanten quantifiziert werden kann.

Satz 1.1. *Zu jeder GSO-Fomel φ existiert eine MSO-Formel $\hat{\varphi}$ mit*

$$G \models \varphi \textit{ genau dann wenn } \mathrm{Inc}(G) \models \hat{\varphi}.$$

Ein Beweis findet sich in [5].

Definition 1.2. Der *Quantorenrang* $\mathrm{qr}(\varphi)$ einer MSO-Formel ist die maximale Anzahl an verschachtelten Quantoren in φ, wobei sowohl Quantoren erster Stufe als auch Quantoren zweiter Stufe gezählt werden.

1.3 Ordnungen

Mit dem Begriff Ordnung bezeichnen wir fortan immer eine lineare Ordnung. Besteht die Möglichkeit einen Graphen zu ordnen spricht man auch von Ordenbarkeit.

Definition 1.3. Eine Formel $\varphi(x, y, \overline{Z})$ definiert eine Ordnung auf einem gefärbten Graphen $G = \langle V, (E_i)_{i \in I}, (P_j)_{j \in J} \rangle$, wenn es Parameter $\overline{P}$ gibt, so dass die durch $\varphi(x, y, \overline{P})$ definierte binäre Relation eine lineare Ordnung auf V ist.

Definition 1.4. Eine Formel $\varphi(x, y, \overline{Z})$ definiert eine Ordnung auf einer Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen, wenn es für jeden Graph $G \in \mathcal{C}$ Parameter $\overline{P}$ gibt, so dass G durch $\varphi(x, y, \overline{P})$ geordnet wird.

- Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen kann *FO-geordnet* werden, wenn es eine FO-Formel $\varphi(x, y, \overline{z})$ und für alle $G \in \mathcal{C}$ Parameter $c_0, \ldots, c_{n-1} \in V$ gibt, so dass $\varphi(x, y, \overline{c})$ eine Ordnung auf G definiert.

- Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen kann *MSO-geordnet* werden, wenn es eine MSO-Formel $\varphi(x, y, \overline{Z})$ und für alle $G \in \mathcal{C}$ Parameter $P_0, \ldots, P_{n-1} \subseteq V$ gibt, so dass $\varphi(x, y, \overline{P})$ eine Ordnung auf G definiert.

- Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen kann *GSO-geordnet* werden, wenn es eine GSO-Formel $\varphi(x, y, \overline{Z})$ und für alle $G \in \mathcal{C}$ Parameter $P_0, \ldots, P_{n-1} \subseteq V \cup E$ gibt, so dass $\varphi(x, y, \overline{P})$ eine Ordnung auf G definiert.

Beispiel 1.5. Sei $\mathcal{C} := \{K_{n,n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Klasse der bipartiten Graphen mit gleich großen Partitionen. Die beiden n-elementigen Knotenteilmengen des Graphen $K_{n,n}$ bezeichnen wir mit A und B. Elemente aus A werden durch die Eigenschaft P identifiziert. Sei Q die Relation $Q := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \leq b\}$, dann lässt sich $K_{n,n}$ mit Hilfe der Parameter P und Q wie folgt ordnen.

$$\varphi(x, y, P, Q) := (Px \wedge \neg Py) \vee [(Px \leftrightarrow Py) \wedge \forall z(Qyz \rightarrow Qxz)],$$

das heißt, es gilt $x \leq y$, wenn $x \in A$ und $y \in B$, oder wenn x und y in der selben Teilmenge liegen und die Elemente, mit denen y in Relation Q steht, eine Teilmenge von den Elementen sind, mit denen x in Relation Q steht. Die Klasse $\mathcal{C}$ lässt sich folglich durch $\varphi(x, y, \overline{Z})$ ordnen.

2 Kombinatorische Kriterien für Ordenbarkeit

In diesem Kapitel werden kombinatorische Kriterien für die Möglichkeit, Graphenklassen mit einer GSO-Formel oder einer MSO-Formel zu ordnen, vorgestellt. Alle vorgestellten Resultate stammen aus [2].

2.1 Klassen von Bäumen

Um eine Bedingung für die Möglichkeit, eine Klasse von Bäumen ordnen zu können, anzugeben, wird die Eigenschaft SEP eingeführt. Diese trifft eine Aussage über die Separierbarkeit des Graphen.

Definition 2.1.

- Die Eigenschaft $\mathrm{Sep}(G, k)$ gibt die maximale Anzahl von Zusammenhangskomponenten eines Graphen G bei Entfernung von k Knoten an.
- Eine Klasse von Graphen $\mathcal{C}$ hat Eigenschaft $\mathrm{SEP}(f)$ für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wenn für alle Graphen G in $\mathcal{C}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{Sep}(G, k) \leq f(k)$.
- Wir sagen eine Klasse $\mathcal{C}$ hat Eigenschaft SEP, wenn es eine Funktion f gibt, so dass $\mathcal{C}$ die Eigenschaft $\mathrm{SEP}(f)$ hat.

Beispiel 2.2. Für den vollständig bipartiten Graph $K_{n,m}$ mit $n \leq m$ gilt:

$$\mathrm{Sep}(K_{n,m}, k) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k < n \\ m, & \text{wenn } k \geq n. \end{cases}$$

Das folgende Lemma zeigt, dass die Eigenschaft SEP eine notwendige Bedingung für die GSO-Ordenbarkeit eines Graphen ist.

Lemma 2.3 ([2, Lemma 4.4.])**.** *Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, so dass $\mathrm{Sep}(G, k) \leq f(n, m, k)$ für jeden Graphen G, der durch eine GSO-Formel $\varphi(x, y, \overline{P})$ geordnet werden kann, wobei $\mathrm{qr}(\varphi) \leq m$ und n die Anzahl der Parameter $P_0, \ldots, P_{n-1}$ ist.*

Damit sind alle Voraussetzungen gegeben um zu zeigen, dass eine Klasse von Bäumen sowohl MSO-, als auch GSO-geordnet werden kann, wenn sie die Eigenschaft SEP hat.

Satz 2.4 ([2, Theorem 4.8.]). *Sei $\mathcal{T}$ eine Klasse von Bäumen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{T}$ kann MSO-geordnet werden.*
2. *$\mathcal{T}$ kann GSO-geordnet werden.*
3. *$\mathcal{T}$ hat die Eigenschaft* SEP.
4. *Es gibt ein $d \in \mathbb{N}$, so dass jeder Baum in der Klasse höchstens Grad d hat.*

Beweis. Da MSO eine Teilmenge von GSO ist, folgt die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2). Die Implikation (2) $\Rightarrow$ (3) folgt aus Lemma 2.3. Um die Implikation (3) $\Rightarrow$ (4) zu zeigen, betrachten wir die Anzahl der Nachbarn eines Knoten. Hat $\mathcal{T}$ die Eigenschaft SEP, so gibt es eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $\mathcal{T}$ die Eigenschaft Sep(f) hat. Damit hat jeder Baum $T \in \mathcal{T}$ die Eigenschaft Sep(f). Ein Knoten $v \in T$ hat folglich höchstens $f(1)$ Nachbarn, da T ohne den Knoten $\{v\}$ höchstens $f(1)$ Zusammenhangskomponenten hat. Damit hat T maximal Grad $f(1)$. Für die Implikation (4) $\Rightarrow$ (1) konstruieren wir eine MSO-Ordnung. Sei dazu T ein Baum mit maximalem Grad d. Es werden d Paramter $P_0, \dots, P_{d-1}$ benötigt, um T zu ordnen. Betrachtet man einen Knoten $r \in T$ als Wurzel, dann existiert eine injektive Abbildung $g : T \to d^{<m}$, für ein $m \in \mathbb{N}$, wobei $d^{<m}$ die Knotenmenge eines d-fach verzweigten Baumes mit Höhe m ist. Sei $P_i := \{v \in T \mid g(v) = wi \text{ für ein } w \in d^{<m}\}$, dann ist r der einzige Knoten in T, der in keiner dieser Mengen enthalten ist. Mit den Parametern $\overline{P}$ und der Baumordung $\preceq$, bei der $u \preceq v$ gilt, wenn u ein Vorgänger von v ist, lässt sich nun die lexikographische Ordnung auf $\mathcal{T}$ definieren:

> Es gilt $u \leq v$ genau dann, wenn $u \preceq v$, oder $u_0 \in P_i, v_0 \in P_k$ für $i < k$ wobei u_0, v_0 die unmittelbaren Nachfolger des längsten gemeinsamen Präfix von u und v sind mit $u_0 \preceq u$ und $v_0 \preceq v$.

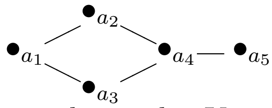
□

2.2 Klassen von Graphen mit verbotenen Minoren

Allgemeiner werden Graphen betrachtet, die einen festen Graphen H nicht als Minor enthalten. Es wird gezeigt, dass eine Klasse von Graphen mit einem verbotenen

Minor H genau dann GSO-geordnet werden kann, wenn sie die Eigenschaft SEP hat.

Definition 2.5. Ein *Minor H* eines Graphen G ist ein Graph, der durch Kantenkontraktion aus einem Teilgraphen von G entsteht.

Beispiel 2.6. Aus dem Graphen  entsteht K_3, der vollständige Graph mit drei Knoten, durch Kontraktion der Kanten (a_1, a_2) und (a_4, a_5).

Definition 2.7. Eine Klasse von Graphen mit einem *verbotenen Minor H* ist eine Menge von Graphen, die H nicht als Minor haben.

Bäume sind beispielsweise eine Klasse von Graphen mit verbotenem Minor K_3.

Satz 2.8 ([2, Theorem 4.13])**.** *Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Graphen mit einem verbotenen Minor H, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$\mathcal{C}$ kann GSO-gordnet werden.*

2. *$\mathcal{C}$ hat die Eigenschaft* SEP*.*

2.3 Klassen von Kographen

In diesem Abschnitt wird die Möglichkeit untersucht, einen Graphen durch eine MSO-Formel zu ordnen. Dazu werden Kographen betrachtet und die kombinatorische Eigenschaft CUT eingeführt. Es wird gezeigt, dass eine Klasse von Kographen $\mathcal{C}$ genau dann MSO-geordnet werden kann, wenn sie die Eigenschaft CUT hat.

Um Kographen definieren zu können, müssen zuerst die folgenden Operationen eingeführt werden.

Definition 2.9.
- Die disjunkte Vereinigung zweier ungefärbter Graphen $A = \langle V_A, E_A \rangle$ und $B = \langle V_B, E_B \rangle$ ist der Graph $A \oplus B := \langle V_A \dot\cup V_B, E_A \dot\cup E_B \rangle$, der alle Elemente beider Graphen enthält.

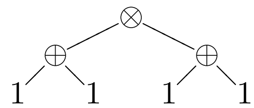
- Die Operation $A \otimes B$, bei der nach dem Bilden der disjunkten Vereinigung $A \oplus B$ der Graphen A und B alle Kanten hinzugefügt werden, die Elemente aus A mit Elementen aus B verbinden, heißt *vollständige Verbindung.*

Definition 2.10. Ein Graph, der aus einzelnen Knoten durch disjunkte Vereinigung oder vollständige Verbindung konstruiert werden kann, heißt *Kograph.* Jeder Kograph kann als Term mit den Operationen $\oplus$, $\otimes$ und einer Konstanten 1, die einen einzelnen Knoten bezeichnet, angegeben werden.

Beispiel 2.11. Der vollständig bipartite Graph $K_{2,2}$ lässt sich als $(1 \oplus 1) \otimes (1 \oplus 1)$ darstellen.

Definition 2.12. Ein *Kobaum* T ist ein Baum, dessen innere Knoten mit $\oplus$ und $\otimes$ bezeichnet sind. Dabei ist kein Knoten mit der selben Operation bezeichnet wie sein direkter Vorgänger. Die Blätter sind mit 1 bezeichnet.

Jeder Kobaum T definiert einen Kographen, der die Blätter von T als Knoten hat. Der Teilbaum von T, der einen beliebigen Knoten in T als Wurzel hat, entspricht dabei dem induzierten Teilgraphen von G, der durch die Blätter an diesem Teilbaum definiert wird.

Beispiel 2.13. Der Graph  ist der Kobaum zum Kographen $K_{2,2}$.

Für die Definition der Eigenschaft CUT untersuchen wir gefärbte Graphen genauer.

Definition 2.14. Ein gefärbter Graph (G, χ) ist ein Graph G zusammen mit einer Abbildung $\chi : V \to [k]$ auf den Knoten von G. Wir nennen χ die *Färbung* von G und sagen ein Knoten v hat *Farbe* a, wenn $\chi(v) = a$ ist.

Wir können die Operationen $\oplus$ und $\otimes$ wie folgt auf gefärbte Graphen verallgemeinern.

Definition 2.15. Sei R eine Relation. Mit $G \otimes_R H$ bezeichnen wir den Graphen, der entsteht, wenn zur disjunkten Vereinigung der Graphen G und H noch Kanten (x, y) hinzugefügt werden, wenn x Farbe a und y Farbe b hat und $x \in G$ und $y \in H$ oder $x \in H$ und $y \in G$ sowie (a, b) in R enthalten ist.

Die Operation $\oplus$ entspricht $\otimes_R$ für den Fall, dass R leer ist. Und $\otimes$ entspricht $\otimes_R$ für $R = [k] \times [k]$.

Definition 2.16.

- Die Eigenschaft $\mathrm{Cut}(G, k)$ gibt die maximale Anzahl n an nichtleeren Graphen $H_0, \ldots, H_{n-1}$ mit Färbungen in $[k]$ an, für die es eine Relation R gibt, so dass

  $$G \cong \mathrm{Un}(H_0 \otimes_R \cdots \otimes_R H_{n-1}).$$

  Dabei ist $\mathrm{Un}(G)$ der Graph, der aus G ensteht, wenn man die Färbungen ignoriert.

- Eine Klasse von Graphen $\mathcal{C}$ hat Eigenschaft $\mathrm{CUT}(f)$ für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wenn für alle Graphen G in $\mathcal{C}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{Cut}(G, k) \leq f(k)$.

- Man sagt eine Klasse $\mathcal{C}$ hat Eigenschaft CUT, wenn es eine Funktion f gibt, so dass $\mathcal{C}$ die Eigenschaft CUT(f) hat.

Beispiel 2.17. Für den vollständigen Graphen K_n gilt $\mathrm{Cut}(K_n, 1) = n$.

Die Eigenschaft CUT liefert eine notwendige Bedingung für die MSO-Ordenbarkeit eines Graphen.

Lemma 2.18 ([2, Lemma 5.7.]). *Es existiert eine Funktion $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, so dass $\mathrm{Cut}(G, k) \leq f(n, m, k)$ für jeden Graphen G, der durch eine MSO-Formel $\varphi(x, y, \overline{P})$ geordnet werden kann, wobei $\mathrm{qr}(\varphi) \leq m$ und n die Anzahl der Parameter $P_0, \ldots, P_{n-1}$ ist.*

Satz 2.19 ([2, Theorem 5.16]). *Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Kographen, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$\mathcal{C}$ kann MSO-geordnet werden.*

2. *$\mathcal{C}$ hat die Eigenschaft* CUT.

3. *Es existiert ein $d \in \mathbb{N}$, so dass der Kobaum jedes Graphen in $\mathcal{C}$ maximalen Grad d hat.*

3 Operationen auf geordneten Klassen von Graphen

In diesem Kapitel werden verschiedene Operationen auf geordnete Klassen von Graphen angewandt. Danach wird überprüft, welche Schlussfolgerungen man aus der Möglichkeit, eine Klasse von Graphen zu ordnen, für die Ergebnisse der Operationen ziehen kann.

3.1 Interpretation

Eine Interpretation erzeugt einen neuen Graphen innerhalb eines gegebenen, indem durch Formeln neue Relationen definiert werden. Dabei bestimmt die Anzahl der freien Variablen der Formel die Stelligkeit der Relation.

Definition 3.1. Seien $\delta(x)$ und $(\varphi_i(\overline{x}))_{i\in I}$ Formeln der Logik erster Stufe oder der monadischen Logik zweiter Stufe mit freien Variablen. Dann ist $\mathcal{I} = \langle \delta(x), (\varphi_i(\overline{x}))_{i\in I}\rangle$ eine *FO-, bzw. MSO-Interpretation* und der durch $\mathcal{I}$ in einem Graphen $\mathfrak{A} = \langle A, (E_i)_{i\in I_A}, (P_j)_{j\in J_A}\rangle$ erzeugte neue Graph ist

$$\mathcal{I}(\mathfrak{A}) := \langle D, \overline{R}\rangle,$$

wobei die Knotenmenge D von $\mathcal{I}(\mathfrak{A})$ durch $D := \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \delta(a)\}$ und die Relationen R_i für $i \in I$ durch $R_i := \{\overline{a} \in A^{n_i} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_i(\overline{a})\}$ gegeben sind.

Die *Koordinatenabbildung* von $\mathcal{I}$ bildet die Elemente von A, die ein Element aus $\mathcal{I}(\mathfrak{A})$ kodieren, auf dieses Element ab. Sie wird ebenfalls mit $\mathcal{I}$ bezeichnet.

Die Interpretation einer Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen ist $\mathcal{I}(\mathcal{C}) := \{\mathcal{I}(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{C}\}$.

Eine Interpretation mit $\delta(x) = \mathit{true}$ heißt *Expansion.* Eine Expansion, die nur einstellige Relationen hinzufügt ohne die bestehenden Relationen zu verändern, heißt *Markierung.*

Beispiel 3.2. Sei $\mathfrak{A}$ ein binärer Baum mit der Präfixordnung $\preceq$ und Prädikaten P_0 und P_1, die den linken beziehungsweise rechten Nachfolger eines Knoten bezeichnen.

Die Expansion $\mathcal{I}$, die alle Relationen erhält und die Relation für die Formel

$$\varphi(x,y) = x \preceq y \vee \exists z,a,b[\mathrm{suc}(z,a) \wedge \mathrm{suc}(z,b) \wedge a \preceq x \wedge b \preceq y \wedge P_0 a \wedge P_1 b]$$

hinzufügt, definiert die lexikographische Ordnung $\leq$ auf $\mathfrak{A}$, bei der der linke Nachfolger eines Knoten kleiner ist als der rechte.

Wir zeigen nun, dass sich FO- und MSO-Formeln in der Interpretation eines Graphen auf FO- und MSO-Formeln im Graphen reduzieren lassen. Mittels dieser Erkenntnis wird dann ein Zusammenhang zwischen der Möglichkeit, die Interpretation einer Klasse von Graphen zu ordnen, und der Möglichkeit, die ursprüngliche Klasse zu ordnen, hergestellt.

Satz 3.3 ([1, Theorem 3.2])**.** *Sei $\mathcal{I}$ eine FO- oder MSO-Interpretation, dann existiert für jede FO- oder MSO-Formel $\varphi(\overline{x})$ eine FO- oder MSO-Formel $\varphi^{\mathcal{I}}(\overline{x})$, so dass*

$$\mathcal{I}(\mathfrak{A}) \models \varphi(\mathcal{I}(\overline{a})) \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{A} \models \varphi^{\mathcal{I}}(\overline{a})$$

für alle Graphen $\mathfrak{A}$ und alle Elemente $a_i \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \delta(a_i)$.

Beweis. Die Formel $\varphi^{\mathcal{I}}$ lässt sicht aus φ konstruieren, indem man alle Relationen R_i durch ihre Definition φ_i ersetzt und alle FO- bzw. MSO-Quantoren auf Elemente bzw. Mengen von Elementen, die $\delta(x)$ erfüllen, relativiert. □

Die Umkehrung gilt nicht, da Relationen aus $\mathfrak{A}$ nicht in $\mathcal{I}(\mathfrak{A})$ enthalten sein müssen.

Bemerkung 3.4. Der vorige Satz gilt nicht für GSO-Formeln. Wählt man beispielweise einen Graph ohne Kanten und fügt in der Interpretation Kanten hinzu, so können Quantoren für Mengen von diesen Kanten nicht auf Elemente im ursprünglichen Graphen relativiert werden.

Mit Hilfe von Satz 3.3 lässt sich nun zeigen, dass eine Ordnung auf einer Expansion sich auf den Ursprungsgraphen übertragen lässt.

Satz 3.5. *Sei $\mathcal{I}$ eine FO-, oder MSO-Expansion. Ist $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ durch eine FO- bzw. MSO-Formel $\varphi(x,y,\overline{Z})$ geordnet, dann lässt sich $\mathcal{C}$ ebenfalls FO- bzw. MSO-ordnen.*

Beweis. Nach Satz 3.3 existiert eine Formel $\varphi^{\mathcal{I}}(x,y,\overline{Z})$, so dass für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ gilt $\mathcal{I}(\mathfrak{A}) \models \varphi(a,b,\overline{P_A})$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi^{\mathcal{I}}(\mathcal{I}^{-1}(a),\mathcal{I}^{-1}(b),\mathcal{I}^{-1}(\overline{P_A}))$. Da in der Expansion von $\mathfrak{A}$ alle Elemente aus A enthalten sind, lässt sich jeder Graph $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{C}$ durch $\varphi^{\mathcal{I}}(x,y,\mathcal{I}^{-1}(\overline{P_A}))$ ordnen. Damit wird $\mathcal{C}$ durch $\varphi^{\mathcal{I}}(x,y,\overline{Z})$ geordnet. □

Existiert zu einer Interpretation eine Umkehrabbildung, so erhalten wir eine Äquivalenz.

Satz 3.6. *Sei $\mathcal{I}$ eine FO-, MSO-Interpretation. Existiert eine FO-, MSO-Interpretation $\mathcal{I}^*$ mit $\mathcal{I}^*(\mathcal{I}(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$, so kann $\mathcal{C}$ genau dann FO- bzw. MSO-geordnet werden, wenn $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ FO- bzw. MSO-geordnet werden kann.*

Beweis. Die Interpretationen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}^*$ sind Expansionen. Damit folgt die Behauptung aus Satz 3.5. □

Korollar 3.7. *Sei $\mathcal{I}$ eine Markierung. Eine Klasse von Graphen $\mathcal{C}$ kann genau dann FO- bzw. MSO-geordnet werden, wenn die Markierung $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ FO- bzw. MSO-geordnet werden kann.*

Beweis. Die Umkehrabbildung $\mathcal{I}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ ist ebenfalls eine Expansion. Damit folgt mit Satz 3.6 die Behauptung. □

Zuletzt werden noch GSO-Interpretationen betrachtet. Diese sind wie folgt definiert.

Definition 3.8. Eine *GSO-Interpretation* ist eine Abbildung der Form

$$\mathfrak{A} \mapsto Inc^{-1}(\mathcal{I}(\mathrm{Inc}(\mathfrak{A}))),$$

wobei $\mathcal{I}$ eine MSO-Interpretation ist.

Man erhält folglich die GSO-Interpretation $\mathcal{I}(\mathfrak{A})$ eines Graphen $\mathfrak{A}$, indem man auf den Inzidenzgraphen $\mathrm{Inc}(\mathfrak{A})$ eine MSO-Interpretation anwendet und den resultierenden Graphen als Inzidenzgraphen von $\mathcal{I}(\mathfrak{A})$ interpretiert.

Die Übertragung von GSO-Formeln in der GSO-Interpretation auf GSO-Formeln im ursprünglichen Graphen funktioniert analog zur Übertragung bei FO- oder MSO-Interpretation.

Satz 3.9. *Sei $\mathcal{I}$ eine GSO-Interpretation, dann existiert für jede GSO-Formel $\varphi(\overline{x})$ eine GSO-Formel $\varphi^{\mathcal{I}}(\overline{x})$, so dass*

$$\mathcal{I}(\mathfrak{A}) \models \varphi(\mathcal{I}(\overline{a})) \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{A} \models \varphi^{\mathcal{I}}(\overline{a})$$

für alle Graphen $\mathfrak{A}$ und alle Elemente $a_i \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \delta(a_i)$.

Beweis. Da GSO auf einem Graphen MSO auf dem Inzidenzgraphen entspricht, existiert nach Satz 1.1 eine MSO-Formel $\hat{\varphi}$ mit $\mathcal{I}(\mathfrak{A}) \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathrm{Inc}(\mathcal{I}(\mathfrak{A})) \models \hat{\varphi}$. Damit gilt nach Satz 3.3, dass für eine MSO-Interpretation $\hat{\mathcal{I}}$ auf

$\hat{\mathcal{I}}^{-1}(\mathrm{Inc}(\mathcal{I}(\mathfrak{A})))$ eine MSO-Formel $\hat{\varphi}^{\hat{\mathcal{I}}}(\overline{x})$ existiert, so dass $\mathrm{Inc}(\mathcal{I}(\mathfrak{A})) \models \hat{\varphi}(\hat{\mathcal{I}}(\overline{a}))$ genau dann, wenn $\hat{\mathcal{I}}^{-1}(\mathrm{Inc}(\mathcal{I}(\mathfrak{A}))) \models \hat{\varphi}^{\hat{\mathcal{I}}}(\overline{a})$. Der Graph $\hat{\mathcal{I}}^{-1}(\mathrm{Inc}(\mathcal{I}(\mathfrak{A})))$ ist nach Definition der GSO-Interpretation gerade $\mathrm{Inc}(\mathfrak{A})$. Damit ist $\hat{\varphi}^{\hat{\mathcal{I}}}(\overline{x})$ eine GSO-Formel auf $\mathfrak{A}$. □

Aus den vorherigen Ergebnissen ergibt sich leicht der folgende Satz.

Satz 3.10. *Sei $\mathcal{I}$ eine GSO-Expansion. Ist $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ durch eine GSO-Formel $\varphi(x, y, \overline{Z})$ geordnet, dann lässt sich $\mathcal{C}$ ebenfalls GSO-ordnen.*

Beweis. Ist $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ durch die GSO-Formel $\varphi(x, y, \overline{Z})$ geordnet, so kann $\mathcal{I}(\mathfrak{A})$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ durch $\varphi(x, y, \overline{P_A})$ GSO-geordnet werden. Nach Satz 3.9 kann folglich $\mathfrak{A}$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ durch $\varphi^{\mathcal{I}}(x, y, \mathcal{I}^{-1}(\overline{P_A}))$ GSO-geordnet werden. □

3.2 Disjunkte Vereinigung

Die Vereinigung zweier disjunkter Graphen ist der Graph, der alle Elemente beider Graphen enthält. Mit Hilfe des Kompositionssatzes aus [1, Theorem 3.10] wird in diesem Abschnitt gezeigt, dass sich Klassen von Graphen genau dann FO-, MSO- oder GSO-ordnen lassen, wenn sich ihre disjunkte Vereinigung ordnen lässt.

Definition 3.11. Die disjunkte Vereinigung zweier gefärbter Graphen $\mathfrak{A} = \langle A, (E_i^A)_{i \in I}, (P_j^A)_{j \in J} \rangle$ und $\mathfrak{B} = \langle B, (E_i^B)_{i \in I}, (P_j^B)_{j \in J} \rangle$ ist der Graph

$$\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} := \langle A \mathbin{\dot\cup} B, (E_i^A \mathbin{\dot\cup} E_i^B)_{i \in I}, (P_j^A \mathbin{\dot\cup} P_j^B)_{j \in J}, P^A, P^B \rangle$$

mit einstelligen Relationen P^A und P^B, die die Knoten aus $\mathfrak{A}$ beziehungsweise $\mathfrak{B}$ identifizieren.

Die disjunkte Vereinigung zweier Klassen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{K}$ von Graphen ist

$$\mathcal{C} \oplus \mathcal{K} := \{\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{C}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}\}.$$

Der Kompositionssatz stellt einen Zusammenhang zwischen Formeln her, die durch die disjunkte Vereinigung $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ zweier Graphen erfüllt werden, und Formeln, die von $\mathfrak{A}$ beziehungsweise $\mathfrak{B}$ erfüllt werden.

Satz 3.12 (Kompositionssatz [1, Theorem 3.10])**.** *Für jede (FO-, MSO-, GSO-) Formel φ existieren (FO-, MSO-, GSO-) Formeln $\psi_0, \dots, \psi_n$ und $\vartheta_0, \dots, \vartheta_n$, so dass $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \models \varphi$ genau dann, wenn es ein $i \leq n$ gibt, so dass $\mathfrak{A} \models \psi_i$ und $\mathfrak{B} \models \vartheta_i$.*

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich nun zeigen, wie die Möglichkeit, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{K}$ zu ordnen, und die Möglichkeit, $\mathcal{C} \oplus \mathcal{K}$ zu ordnen, zusammenhängen.

Satz 3.13. *Zwei Klassen von Graphen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{K}$ können genau dann FO-, MSO- bzw. GSO- geordnet werden, wenn die disjunkte Vereinigung $\mathcal{C} \oplus \mathcal{K}$ FO-, MSO- bzw. GSO- geordnet werden kann.*

Beweis. Seien $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ und $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ durch $\varphi(x, y, \overline{P_A})$ bzw. $\psi(x, y, \overline{P_B})$ geordnet, dann lässt sich die disjunkte Vereinigung $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ ordnen durch

$$\xi(x, y, \overline{P_A}, \overline{P_B}) := (P^A x \wedge P^A y \wedge \varphi(x, y, \overline{P_A})) \vee (P^B x \wedge P^B y \wedge \psi(x, y, \overline{P_B})) \vee (P^A x \wedge P^B y),$$

das heißt, es gilt $x \leq y$ genau dann, wenn x und y beide Elemente von A sind und $x \leq y$ in $\mathfrak{A}$ gilt, oder wenn x und y beide Elemente von B sind und $x \leq y$ in $\mathfrak{B}$ gilt, oder wenn x aus A ist und y aus B.

Sei die disjunkte Vereinigung $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \in \mathcal{C} \oplus \mathcal{K}$ geordnet durch $\varphi(x, y, \overline{P})$. Dann existieren nach dem Kompositionssatz Formeln $\psi_0, \dots, \psi_n$ und $\vartheta_0, \dots, \vartheta_n$, so dass für $a, b \in A$ genau dann $(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}, \overline{P}, a, b) \models \varphi$ gilt, wenn es ein $i \leq n$ gibt, so dass $(\mathfrak{A}, \overline{P}|_A, a, b) \models \psi_i$ und $(\mathfrak{B}, \overline{P}|_B) \models \vartheta_i$. Damit lässt sich $\mathfrak{A}$ ordnen durch

$$\xi(x, y, \overline{P}|_A) := \bigvee_{i \in I} \psi_i(x, y, \overline{P}|_A),$$

mit $I = \{i \leq n \mid (\mathfrak{B}, \overline{P}|_B) \models \vartheta_i\}$. □

3.3 Produkt

Das Produkt zweier Graphen ist derjenige Graph, der alle geordneten Paare von Elementen der beiden Graphen enthält, wobei die erste Komponente ein Element des ersten Graphen und die zweite Komponente ein Element des zweiten Graphen ist.

Definition 3.14. Das Produkt zweier gefärbter Graphen $\mathfrak{A} = \langle A, (E_i^A)_{i \in I}, (P_j^A)_{j \in J} \rangle$ und $\mathfrak{B} = \langle B, (E_i^B)_{i \in I}, (P_j^B)_{j \in J} \rangle$ ist der Graph

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} := \langle A \times B, (E_i^0)_{i \in I}, (E_i^1)_{i \in I}, (P_j^0)_{j \in J}, (P_j^1)_{j \in J}, \sim_0, \sim_1 \rangle,$$

wobei die Kantenrelationen definiert sind als

$$E_i^0 := \{(\langle a,b\rangle, \langle a',b'\rangle) \mid (a,a') \in E_i^A, b,b' \in B\} \text{ für } i \in I$$
$$\text{und } E_i^1 := \{(\langle a,b\rangle, \langle a',b'\rangle) \mid a,a' \in A, (b,b') \in E_i^B\} \text{ für } i \in I.$$

Die Färbung der Knoten in $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ wird bestimmt durch $P_j^0 := \{\langle a,b\rangle \mid a \in P_j^A\}$ für $j \in J$ und $P_j^1 := \{\langle a,b\rangle \mid b \in P_j^B\}$ für $j \in J$. Zusätzlich werden neue Gleichheitsrelationen $\sim_0$ und $\sim_1$ definiert, die die Komponenten aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ vergleichen

$$\sim_0 := \{(\langle a,b\rangle, \langle a',b'\rangle) \mid a = a'\}$$
$$\text{und } \sim_1 := \{(\langle a,b\rangle, \langle a',b'\rangle) \mid b = b'\}.$$

Das Produkt zweier Klassen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{K}$ von Graphen ist $\mathcal{C} \otimes \mathcal{K} := \{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{C}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}\}$.

Hier wird ebenfalls ein Kompositionssatz genutzt, um den Zusammenhang zwischen Formeln, die durch das Produkt $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ zweier Graphen erfüllt werden, und Formeln, die von $\mathfrak{A}$ beziehungsweise $\mathfrak{B}$ erfüllt werden, herzustellen.

Satz 3.15 (Kompositionssatz [1, Theorem 3.31]). *Für jede FO-Formel φ existieren FO-Formeln $\psi_0, \dots, \psi_n$ und $\vartheta_0, \dots, \vartheta_n$, so dass $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \models \varphi$ genau dann, wenn es ein $i \leq n$ gibt, so dass $\mathfrak{A} \models \psi_i$ und $\mathfrak{B} \models \vartheta_i$.*

Bemerkung 3.16. Der Kompositionssatz gilt bei Produkten nicht für MSO- oder GSO-Formeln, da eine Menge von Knoten aus $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ nicht eindeutig durch die Projektion in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmt werden kann.

Wir wollen zeigen, wie die Ordnungen von $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ beziehungsweise $\mathfrak{B}$ zusammenhängen. Zur Vereinfachung nutzen wir bereits gezeigte Erkenntnisse über Interpretationen.

Lemma 3.17. *Es gibt eine FO-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$.*

Beweis. Wählt man ein Element $c \in A \times B$, setzt $\delta(z) := z \sim_1 c$ und löscht die Relationen $(E_i^1)_{i\in I}$ und $(P_j^1)_{j\in J}$, so bleiben nur Elemente und Relationen entsprechend $\mathfrak{A}$ erhalten. □

Damit lässt sich nun der Zusammenhang zwischen der FO-Ordnung von $\mathcal{C}$ und $\mathcal{K}$ und der FO-Ordnung von $\mathcal{C} \otimes \mathcal{K}$ herstellen.

Satz 3.18. *Zwei Klassen von Graphen $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$ können genau dann FO-geordnet werden, wenn das Produkt $\mathcal{C} \otimes \mathcal{K}$ FO-geordnet werden kann.*

Beweis. Seien $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ und $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ durch $\varphi(x, y, \overline{c^A})$ mit $\overline{c^A} = (c_j^A)_{j \in J}$ bzw. $\psi(x, y, \overline{c^B})$ mit $\overline{c^B} = (c_j^B)_{j \in J}$ geordnet. Da Interpretationen $\mathcal{I}^A$ und $\mathcal{I}^B$ mit $\mathcal{I}^A(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$ und $\mathcal{I}^B(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$ existieren, kann nach Satz 3.5 das Produkt $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ durch

$$\begin{aligned}\xi(z, z', \overline{c^A} \times \overline{c^B}) :=& ((z \nsim_0 z') \wedge \varphi^{\mathcal{I}^A}(z, z', \overline{c^A} \times \overline{c^B})) \\ & \vee ((z \sim_0 z') \wedge \psi^{\mathcal{I}^B}(z, z', \overline{c^A} \times \overline{c^B}))\end{aligned}$$

mit $\overline{c^A} \times \overline{c^B} := \overline{\langle c_j^A, c_j^B \rangle}_{j \in J}$ für alle c_i^A aus $\overline{c^A}$ und c_j^B aus $\overline{c^B}$ geordnet werden.

Es gilt also $z \leq z'$ genau dann, wenn die ersten Komponenten von z und z' verschieden sind und die erste Komponente von z kleiner der von z' in $\mathfrak{A}$ ist, oder wenn die jeweiligen ersten Komponenten gleich sind und die zweite Komponente von z in $\mathfrak{B}$ kleiner oder gleich der zweiten Komponente von z' ist.

Sei das Produkt $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{K}$ geordnet durch $\varphi(z, z', \overline{c})$, mit $c_j := \langle c_j^A, c_j^B \rangle$. Dann existieren nach dem Kompositionssatz Formeln $\psi_0, \ldots, \psi_n$ und $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_n$, so dass für $a, a' \in A$, $b \in B$ genau dann $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \overline{c}, \langle a, b \rangle, \langle a', b \rangle) \models \varphi$ gilt, wenn es ein $i \leq n$ gibt, so dass $(\mathfrak{A}, (c_j^A)_{j \in J}, a, a') \models \psi_i$ und $(\mathfrak{B}, (c_j^B)_{j \in J}, b) \models \vartheta_i$. Wählt man ein $b \in B$, dann lässt sich $\mathfrak{A}$ ordnen durch

$$\xi(x, y, (c_j^A)_{j \in J}) := \bigvee_{i \in I} \psi_i(x, y, (c_j^A)_{j \in J}),$$

mit $I = \{i \leq n \mid ((\mathfrak{B}, (c_j^B)_{j \in J}, b) \models \vartheta_i\}$. □

Definition 3.19. Die *k-te Potenz* eines Graphen $\mathfrak{A}$ ist das k-fache Produkt des Graphen mit sich selbst.

$$\mathfrak{A}^k := \mathfrak{A} \times \cdots \times \mathfrak{A}$$

Die *k-te Potenz* einer Klasse von Graphen $\mathcal{C}$ ist $\mathcal{C}^k := \mathcal{C} \times \cdots \times \mathcal{C}$.

Korollar 3.20. *Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen kann genau dann FO-geordnet werden, wenn die Potenz $\mathcal{C}^k$ FO-geordnet werden kann.*

Bemerkung 3.21. Da die Anwendung einer mehrdimensionalen Interpretation der Verkettung von Potenz und eindimensionaler Interpretation entspricht, gelten die Schlussfolgerungen für Logik erster Stufe aus Abschnitt 3.1 auch für mehrdimensionale Interpretationen.

3.4 Quotient

Im Quotienten werden Elemente des Graphen, die bezüglich einer Kongruenzrelation äquivalent sind, zusammengefasst. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich aus der Möglichkeit, eine Klasse von Graphen zu ordnen, auch die Möglichkeit, den Quotienten zu ordnen, ergibt.

Für die Definition des Quotienten wird zuerst die Definition der Äquivalenzrelation benötigt.

Definition 3.22. Eine *Kongruenzrelation* $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, die mit den Relationen des Graphen insofern veträglich ist, dass für alle $\overline{a}, \overline{a}' \in V$ mit $a_i \sim a_i'$ für alle i und für alle Relationen R gilt $\overline{a} \in R$ genau dann, wenn $\overline{a}' \in R$.

Definition 3.23. Sei $\mathfrak{A} = \langle A, (E_i)_{i\in I}, (P_j)_{j\in J}\rangle$ ein gefärbter Graph und $\sim$ eine Kongruenzrelation. Der *Quotient* von $\mathfrak{A}$ ist der Graph

$$\mathfrak{A}/{\sim} := \langle A/{\sim}, (E_i')_{i\in I}, (P_j')_{j\in J}\rangle,$$

der wie folgt definiert ist. Sei $[a]$ die Äquivalenzklasse von a, dann ist die Knotenmenge des Quotienten gegeben durch $A/{\sim} := \{[a] \mid a \in A\}$, die Kantenrelationen durch $E_i' := \{([a_0], [a_1]) \mid (a_0, a_1) \in E_i\}$ für $i \in I$ und die Färbung der Knoten durch $P_j' := \{[a] \mid a \in P_j\}$.

Der Quotient einer Klasse von Graphen ist $\mathcal{C}/{\sim} := \{\mathfrak{A}/{\sim} \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{C}\}$.

Bemerkung 3.24. Es werden nur Quotienten betrachtet, die durch Relationen entstehen, die bereits im Graphen definiert sind. Jede definierbare Äquivalenzrelation lässt sich durch eine Interpretation zum Graphen hinzufügen. Aus jeder Äquivalenrelation kann eine Kongruenzrelation gewonnen werden, indem mittels einer Interpretation die Relationen des Graphen angepasst werden.

Satz 3.25. *Lässt sich eine Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen FO-, MSO, GSO-ordnen, so kann man den Quotienten $\mathcal{C}/{\sim}$ ebenfalls FO-, MSO-, GSO-ordnen.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ durch $\varphi(x, y, \overline{P_A})$ geordnet, dann lässt sich der Quotient $\mathfrak{A}/{\sim}$ durch $\varphi(\min[x], \min[y], \overline{[P_A]})$ ordnen, wobei $y = \min[x]$ genau dann gilt, wenn

$$x \sim y \wedge \forall z(z \sim x \rightarrow \varphi(y, z, \overline{P_A})).$$

Damit wird $\mathcal{C}/{\sim}$ durch $\varphi(\min[x], \min[y], \overline{[Z]})$ geordnet.

Aus den Äquivalenzklassen wird jeweils das in $\mathfrak{A}$ kleinste Element als Vertreter ausgewählt und die Äquivalenzklassen werden danach geordnet. $\square$

Bemerkung 3.26. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht, da durch eine Ordnung auf dem Quotienten keine Ordnung für Elemente innerhalb der Äquivalenzklassen definiert ist. Sei beispielsweise $\mathcal{C}$ die Klasse aller Graphen ohne Kanten, und $\sim$ die Relation, die besagt, dass keine Kante zwischen zwei Knoten existiert. Der Quotient $\mathfrak{A}/\!\sim$ für $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ enthält folglich nur ein Element. Somit kann $\mathcal{C}/\!\sim$ trivial geordnet werden, aber $\mathcal{C}$ kann nicht geordnet werden.

3.5 Muchnik-Iteration

Die Muchnik-Iteration eines Graphen besteht aus unendlich vielen Kopien dieses Graphen, die baumartig angeordnet sind. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass eine Klasse von Graphen genau dann MSO-geordnet werden kann, wenn die Iteration MSO-geordnet werden kann.

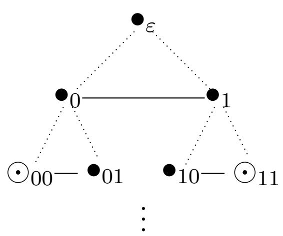
Definition 3.27. Sei A^* die Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus A, inklusive der leeren Folge ε. Die *Muchnik-Iteration* $\mathfrak{A}^*$ eines gefärbten Graphen $\mathfrak{A} = \langle A, (E_i)_{i\in I}, (P_j)_{j\in J}\rangle$ ist ein Baum, dessen Knoten Folgen von Elementen aus A sind, also

$$\mathfrak{A}^* := \langle A^*, \preceq, cl, (E_i^*)_{i\in I}, (P_j^*)_{j\in J}\rangle.$$

Dabei bezeichnet $\preceq$ die Präfixordnung, das heißt $x \preceq y$ genau dann wenn $y = xz$ für ein $z \in A^*$. Die Kantenrelationen werden durch $E_i^* := \{(wu, wv) \mid w \in A^*, (u, v) \in E_i\}$ bestimmt, die Prädikate sind $P_j^* := \{wa \mid w \in A^*, a \in P_j\}$ und cl $:= \{waa \mid w \in A^*, a \in A\}$ bezeichnet die Klonrelation.
Die Iteration $\mathfrak{A}^*$ ohne die Wurzel ε wird mit $\mathfrak{A}^+$ bezeichnet.

Die Iteration einer Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen ist $\mathcal{C}^* := \{\mathfrak{A}^* \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{C}\}$ und dementsprechend $\mathcal{C}^+ := \{\mathfrak{A}^+ \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{C}\}$. Damit ist $\mathcal{C}^* = \mathcal{I}(\mathcal{C}^+ \oplus \{\varepsilon\})$, für eine Interpretation $\mathcal{I}$, durch welche die Kanten zwischen ε und $\mathfrak{A}^+$ hinzugefügt werden.

Beispiel 3.28. Sei $\mathfrak{A}$ der Graph $\bullet_0 \text{——} \bullet_1$. Dann ist $\mathfrak{A}^*$ der folgende Baum:



Dabei stellen die gepunkteten Linien die Präfixordnung $\preceq$ dar und $\odot$ die Klonrelation cl.

Aus der Ordnung eines Graphen lässt sich über die lexikographische Ordnung leicht eine Ordnung auf der Iteration definieren.

Satz 3.29. *Ist eine Klasse von Graphen $\mathcal{C}$ durch eine FO-, MSO-, oder GSO-Formel geordnet, so lässt sich die Iteration $\mathcal{C}^*$ ebenfalls FO-, MSO-, bzw. GSO-ordnen.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ geordnet durch $\varphi(x, y, \overline{Z})$, mit $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ geordnet durch $\varphi(x, y, \overline{P_A})$, so lässt sich $\mathfrak{A}^*$ durch

$$\xi(x, y, \overline{P_A}) := x \preceq y \vee \exists z, a, b(\mathrm{suc}(z, a) \wedge \mathrm{suc}(z, b) \wedge a \preceq x \wedge b \preceq y \wedge \varphi'(a, b, z, \overline{P_A}^*))$$

ordnen, wobei φ' aus φ entsteht, indem FO- bzw. MSO-Quantoren auf Elemente bzw. Mengen von Elementen, die direkte Nachfolger von z sind, relativiert werden. Eine Folge von Knoten y ist demnach größer einer Folge x, wenn x ein Präfix von y ist, oder wenn an der ersten Stelle, an der sich die Folgen unterscheiden, der Eintrag in y größer ist als der in x. Folglich kann $\mathcal{C}^*$ durch $\xi(x, y, \overline{Z})$ geordnet werden. □

Um eine aus der Ordnung der Iteration eine Ordnung auf dem ursprünglichen Graphen zu definieren, wird eine Variante des Kompositionssatzes benötigt.

Satz 3.30 (Kompositionssatz [1, Theorem 3.16])**.** *Für jede MSO-Formel φ existiert eine endliche Folge von MSO-Formeln $\chi_0, \ldots, \chi_{s-1}$ und eine MSO-Formel ψ, so dass*

$$(\mathfrak{A}^+, \overline{P}) \models \varphi \textit{ genau dann, wenn } (\mathfrak{A}, [\![\chi_0]\!], \ldots, [\![\chi_{s-1}]\!], \overline{P}|_A) \models \psi,$$

wobei $[\![\chi]\!] := \{a \in A \mid (\mathfrak{A}^+, \overline{P})|_{\mathfrak{A}A^*} \models \chi\}$.

Nun lässt sich zuerst eine Aussage über die Iteration ohne die Wurzel treffen.

Lemma 3.31. *Kann $\mathcal{C}^+$ durch eine MSO-Formel geordnet werden, so lässt sich $\mathcal{C}$ ebenfalls MSO-ordnen.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}^+$ MSO-geordnet durch $\varphi(x, y, \overline{Z})$, wobei ein Graph $\mathfrak{A}^+ \in \mathcal{C}^+$ geordnet wird durch die MSO-Formel $\varphi(x, y, \overline{P_A})$. Dann existieren nach dem Kompositionssatz MSO-Formeln $\chi_0, \ldots, \chi_{s-1}$ und eine MSO-Formel ψ, so dass für $a, b \in A$ genau dann $(\mathfrak{A}^+, a, b, \overline{P_A}) \models \varphi$ gilt, wenn $(\mathfrak{A}, [\![\chi_0]\!], \ldots, [\![\chi_{s-1}]\!], a, b, \overline{P_A}|_A) \models \psi$. Damit lässt sich $\mathfrak{A}$ ordnen durch

$$\psi(x, y, \overline{P_A}|_A, [\![\chi_0]\!], \ldots, [\![\chi_{s-1}]\!]).$$

□

Die Iteration $\mathcal{C}^*$ ensteht aus $\mathcal{C}^+$ indem durch disjunkte Vereinigung und eine Interpretation die Wurzel ε und entsprechende Kanten hinzugefügt werden. Mit den Resultaten über disjunkte Vereinigung und Interpretationen können wir nun den folgenden Satz zeigen.

Satz 3.32. *Die Iteration einer Klasse von Graphen $\mathcal{C}^*$ kann genau dann durch eine MSO-Formel geordnet werden, wenn $\mathcal{C}$ durch eine MSO-Formel geordnet werden kann.*

Beweis. Ist $\mathcal{C}$ MSO-geordnet, so kann nach Satz 3.29 die Iteration $\mathcal{C}^*$ ebenfalls MSO-geordnet werden.

Sei $\mathcal{C}^*$ MSO-geordnet und $\mathcal{I}^*$ eine Interpretation, die die Kanten zwischen ε und $\mathfrak{A}^+$ einfügt, so kann nach Satz 3.6 über die Interpretation $\mathcal{C}^+ \oplus \{\varepsilon\}$ MSO-geordnet werden. Nach Satz 3.13 über die disjunkte Vereinigung können dann auch $\mathcal{C}^+$ und $\{\varepsilon\}$ MSO-geordnet werden. Mit Lemma 3.31 erhalten wir folglich eine MSO-Ordnung auf $\mathcal{C}$. $\square$

4 Schlusswort

Wir haben gesehen, dass es für alle betrachteten Operationen in mindestens einer Logik, für manche sogar in allen, möglich ist, aus der ursprünglichen Ordnung eine Ordnung auf dem Ergebnis der Operation zu bestimmen. Dies ermöglicht die Übertragung von Resultaten, die für gewisse Graphen gezeigt wurden, auf weitere Graphenklassen.

In dieser Arbeit wurde nur eine kleine Auswahl von Operationen sehr spezifisch betrachtet. Für eine allgemeinere Untersuchung kann man in Betracht ziehen, dass die Eigenschaften SEP und CUT aus dem zweiten Kapitel notwendige Bedingungen für die GSO- bzw. MSO- Ordenbarkeit von Graphen sind. Daher ist es naheliegend, dass andere Operationen, die die Ordenbarkeit erhalten sollen, auch die Eigenschaften SEP und CUT erhalten müssen.

Literaturverzeichnis

[1] A. Blumensath, T. Colcombet, und C. Löding, *Logical theories and compatible operations*, Logic and automata: History and Perspectives, (J. Flum, E. Grädel, T. Wilke, Hrsg.), Amsterdam University Press (2007), 72–106.

[2] A. Blumensath und B. Courcelle, *Monadic second-order definable graph orderings*, Logical Methods of Computer Science (noch nicht erschienen).

[3] B. Courcelle, *The monadic second-order logic of graphs x: Linear orderings*, Theoretical Computer Science (1996), 87–143.

[4] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, 2010.

[5] E. Grädel, C. Hirsch, und M. Otto, *Back and forth between guarded and modal logics*, ACM Transactions on Computational Logics (2002), 418–463.