Sémantiky programovacích jazyků

Doporučená literatura

- Glynn Winskel: The Formal Semantics of Programming Languages
- Matthew Hennesy: The Semantics of Programming Languages
- PDF a PS soubor této prezentace je dostupný na
  http://www.fi.muni.cz/usr/kucera/teach.html

Definice programovacího jazyka

- Syntaxe definuje „správně utvořené“ programy (akceptované překladačem).
  - ⋆ lexikální jednotky (klíčová slova, identifikátory, konstanty, operátory, . . .)
  - ⋆ frázová struktura (určuje jaké posloupnosti lexikálních jednotek jsou „přípustné“
- Sémantika popisuje chování programu (co program „dělá“)
  - ⋆ neformální (učebnice programovacích jazyků)
  - ⋆ formální („matematická“)

Účel a použitelnost formální sémantiky

- Korektnost implementace
  - ⋆ překladač (co musí splňovat, aby byl „správný“?)
  - ⋆ optimalizátor (jaké úpravy kódu jsou „přípustné“?)
- Verifikace programů
  - ⋆ vlastnosti programů (jak je vyjádřit, jak *dokázat* že daný program má danou vlastnost?)
  - ⋆ ekvivalence programů (co znamená, že se dva programy „chovají stejně“?)
  - ⋆ systémy, které jsou paralelní, distribuované, pracují s reálným časem, nebo jsou řízené událostmi, nelze „ladit“!

    $X := X + 1 \parallel X := X + 1$
- Návrh programovacích jazyků

Základní „styly“ sémantik programovacích jazyků

- Operační sémantika definuje jak se program provádí
- Denotační sémantika definuje co program počítá
- Axiomatická sémantika umožňuje odvodit vlastnosti programu

Abstraktní syntax programovacích jazyků

- Abstraktní syntaktická rovnice: rovnice tvaru

  $$X \quad ::= \quad at_1 \mid \cdots \mid at_n \mid op_1(\alpha_{(1,1)}, \ldots, \alpha_{(1,n_1)}) \mid \cdots \mid op_m(\alpha_{(m,1)}, \ldots, \alpha_{(m,n_m)})$$

  kde

  - $at_1, \cdots, at_n$ jsou atomy.
  - $op_1, \cdots, op_m$ jsou operace (které mohou mít i nulovou aritu – pak jde o konstanty).
  - $\alpha_{(i,j)}$ je buď X nebo atom (opakované výskyty jsou rozlišeny indexy).
  - Pro každý atom at_i je dána jeho syntaktická doména (množina) A_i.

- Příklad:

  $$X \quad ::= \quad num \mid \omega \mid X_0{+}X_1 \mid X_0{-}X_1$$

  Syntaktickou doménou atomu num jsou dekadické zápisy celých čísel, ω je konstanta.

Syntaktické stromy

- Uvažme abstraktní syntaktickou rovnici

  $$X \quad ::= \quad at_1 \mid \cdots \mid at_n \mid op_1(\alpha_{(1,1)}, \ldots, \alpha_{(1,n_1)}) \mid \cdots \mid op_m(\alpha_{(m,1)}, \ldots, \alpha_{(m,n_m)})$$

- Množina syntaktických stromů pro X je definována induktivně:
  - Je-li a prvek syntaktické domény některého z atomů $at_1, \cdots, at_n$, je strom s jediným uzlem a syntaktický strom pro X výšky 0.
  - Je-li op konstanta, je strom s jediným uzlem op syntaktický strom pro X výšky 0.
  - Je-li op operace arity $n \geq 1$ s argumenty $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, je strom s kořenem op a n následníky, kde i-tý následník je buď
    - kořen syntaktického stromu pro X, je-li $\alpha_i = X$,
    - prvek syntaktické domény atomu at, je-li $\alpha_i = at$.

    také syntaktickým stromem pro X výšky $k + 1$, kde k je maximum z výšek následníků kořene (prvky syntaktických domén atomů mají výšku 0).
- U syntaktických stromů rozlišujeme pořadí následníků.
- Je možné definovat i systémy syntaktických rovnic, kde množina syntaktických stromů určená jednou rovnicí definuje syntaktickou doménu atomu jiné rovnice.

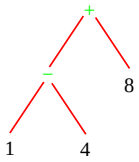
Příklad definice abstraktní syntaxe

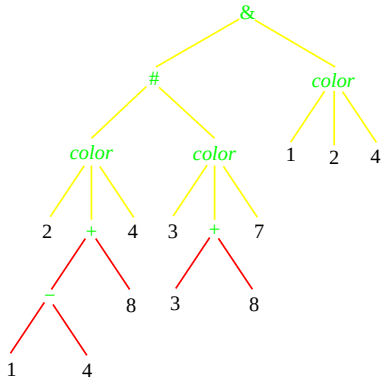
- $X \quad ::= \quad num \mid X_0 + X_1 \mid X_0 - X_1$

  Syntaktickou doménou atomu *num* jsou dekadické zápisy celých čísel.

- $Y \quad ::= \quad color(X_0, X_1, X_2) \mid Y_0 \# Y_1 \mid Y_0 \& Y_1$

  Syntaktickou doménou atomu X je množina všech syntaktických stromů pro X.

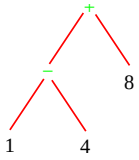




Konkrétní syntax programovacích jazyků

Určuje, jak jednoznačně zapisovat syntaktické stromy jako řetězce symbolů.

- Aritmetické výrazy



  Zápis $1 - 4 + 8$ není jednoznačný.
  - ⋆ prefixová notace: $+ \; - \; 1 \; 4 \; 8$
  - ⋆ postfixová notace: $8 \; 4 \; 1 \; - \; +$
  - ⋆ závorky: $(1 - 4) + 8$

- Volitelná **else** klauzule příkazu **if − then − else**
  - ⋆ závorky
  - ⋆ klíčové slovo **fi**

Odvozovací systémy, důkazy a dokazatelná tvrzení

- Odvozovací systém je dán konečnou množinou schémat axiomů a odvozovacích pravidel tvaru

$$\frac{\text{předpoklad}_1 \quad \cdots \quad \text{předpoklad}_n}{\text{závěr}} \text{ podmínky}$$

- Důkaz je konečný strom, jehož listy jsou instance axiomů a vnitřní uzly instance pravidel.
- Tvrzení α je dokazatelné, jestliže existuje důkaz s kořenem α.
- Důkazové stromy je zvykem psát „kořenem dolů“ (tj. „obráceně“ než syntaktické stromy).

Odvozovací systém výrokové logiky

- Abstraktní syntax formulí výrokové logiky:

$$\varphi \quad ::= \quad \textit{výrok} \mid \varphi_0 \rightarrow \varphi_1 \mid \neg\varphi$$

kde syntaktická doména atomu *výrok* je spočetná množina atomických výroků $\{A, B, C \ldots\}$.

- Schémata axiomů odvozovacího systému výrokové logiky
  - $\star\ \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - $\star\ (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \xi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \xi))$
  - $\star\ (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- Odvozovací pravidlo modus ponens

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

- Příklad: $A \rightarrow A$ je dokazatelná formule.

$$\dfrac{A \rightarrow (A \rightarrow A) \qquad \dfrac{A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \qquad (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))}{(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)}}{A \rightarrow A}$$

Indukce k výšce stromu

- Buď $\mathcal{M}$ (nějaká) množina stromů konečné výšky a V (nějaká) vlastnost, která je pro každý strom $T \in \mathcal{M}$ buď pravdivá nebo nepravdivá.

- Tvrzení o indukci k výšce stromu: Nechť je splněna následující podmínka:

  $\star$ Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$:

  > Je-li V je pravdivá pro každé $T \in \mathcal{M}$ výšky menší než n, pak V je pravdivá pro každé $T' \in \mathcal{M}$ výšky právě n.

  Pak V je pravdivá pro všechny stromy z $\mathcal{M}$.

- Strukturální indukce: indukce k výšce (syntaktického) stromu, kde $\mathcal{M}$ je množina všech syntaktických stromů určená danou abstraktní syntaktickou rovnicí.

- Indukce k výšce odvození: indukce k výšce (důkazového) stromu, kde $\mathcal{M}$ je množina všech důkazů daného odvozovacího systému.

Abstraktní syntaxe jazyka IMP

- Základní syntaktické domény

  $\mathbf{Num} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$

  $\mathbf{Bool} = \{\mathbf{tt}, \mathbf{ff}\}$

  $\mathbf{Var} = \{A, B, C, \ldots\}$

- Aritmetické výrazy $\mathbf{Aexp}$

  $$a ::= n \mid X \mid a_0 + a_1 \mid a_0 - a_1 \mid a_0 * a_1$$

  kde $n \in \mathbf{Num}$ a $X \in \mathbf{Var}$.

- Pravdivostní výrazy $\mathbf{Bexp}$

  $$b ::= t \mid a_0 = a_1 \mid a_0 \leq a_1 \mid \mathbf{not}\ b \mid b_0\ \mathbf{and}\ b_1 \mid b_0\ \mathbf{or}\ b_1$$

  kde $t \in \mathbf{Bool}$ a $a_0, a_1 \in \mathbf{Aexp}$.

- Příkazy $\mathbf{Com}$

  $$c ::= \mathbf{skip} \mid X := a \mid c_0; c_1 \mid \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1 \mid \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c$$

  kde $X \in \mathbf{Var}$, $a \in \mathbf{Aexp}$ a $b \in \mathbf{Bexp}$.

Operační sémantika

- Programům v daném jazyce je přiřazen přechodový systém, který popisuje výpočetní procesy jednotlivých programů.
- Přechodový systém: trojice $(S, \mathcal{A}, \rightarrow)$, kde
  - S je množina konfigurací (ne nutně konečná!)
  - $\mathcal{A}$ je množina akcí
  - $\rightarrow \subseteq S \times \mathcal{A} \times S$ je přechodová relace
- Jednotlivé „typy“ operační sémantiky se liší definicí množiny konfigurací a přechodové relace
  - SMC stroj: Stack – Memory – Control stack
  - λ-kalkul
  - SOS: Strukturální Operační Sémantika

SOS sémantika IMP prvního typu („big step“)

- Stav je zobrazení $\sigma : \mathbf{Var} \rightarrow \mathbb{Z}$, množina všech stavů se značí Σ.
- Cílem je definovat přechodový systém, kde
  - množina konfigurací je Σ,
  - množina akcí je $\mathbf{Com}$,
  - přechodová relace odpovídá „výslednému efektu“ programů, tj. $\sigma \xrightarrow{c} \sigma'$ právě když výpočet programu c zahájený ve stavu σ skončí a přejde do stavu σ'.
- Za tímto účelem definujeme odvozovací systémy pro tři relace:
  - $\rightarrow_A \subseteq \mathbf{Aexp} \times \Sigma \times \mathbb{Z}$; prvky zapisujeme ve tvaru $\langle a, \sigma \rangle \rightarrow_A n$.
  - $\rightarrow_B \subseteq \mathbf{Bexp} \times \Sigma \times \mathbb{T}$; prvky zapisujeme ve tvaru $\langle b, \sigma \rangle \rightarrow_B t$.
  - $\rightarrow_C \subseteq \mathbf{Com} \times \Sigma \times \Sigma$; prvky zapisujeme ve tvaru $\langle c, \sigma \rangle \rightarrow_C \sigma'$.

  Indexy A, B, C budou obvykle vynechány.
- Pak již lze definovat: $\sigma \xrightarrow{c} \sigma' \quad \Longleftrightarrow \quad \langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$

Aritmetické výrazy Aexp

$\langle a, \sigma \rangle \to n$ „aritmetický výraz a se ve stavu σ vyhodnotí na $n \in \mathbb{Z}$“

- $\langle n, \sigma \rangle \to n$
- $\langle X, \sigma \rangle \to \sigma(X)$
- $\dfrac{\langle a_0, \sigma \rangle \to n_0 \quad \langle a_1, \sigma \rangle \to n_1}{\langle a_0 + a_1, \sigma \rangle \to n} \; n = n_0 + n_1$
- $\dfrac{\langle a_0, \sigma \rangle \to n_0 \quad \langle a_1, \sigma \rangle \to n_1}{\langle a_0 - a_1, \sigma \rangle \to n} \; n = n_0 - n_1$
- $\dfrac{\langle a_0, \sigma \rangle \to n_0 \quad \langle a_1, \sigma \rangle \to n_1}{\langle a_0 * a_1, \sigma \rangle \to n} \; n = n_0 * n_1$

Pravdivostní výrazy Bexp

$\langle b, \sigma \rangle \to t$ „pravdivostní výraz b se ve stavu σ vyhodnotí na $t \in \mathbb{T}$“

- $\langle \mathbf{tt}, \sigma \rangle \to \mathbf{true}$
- $\langle \mathbf{ff}, \sigma \rangle \to \mathbf{false}$
- $\dfrac{\langle a_0, \sigma \rangle \to n_0 \quad \langle a_1, \sigma \rangle \to n_1}{\langle a_0 = a_1, \sigma \rangle \to \mathbf{true}} \; n_0{=}n_1$
- $\dfrac{\langle a_0, \sigma \rangle \to n_0 \quad \langle a_1, \sigma \rangle \to n_1}{\langle a_0 = a_1, \sigma \rangle \to \mathbf{false}} \; n_0{\neq}n_1$
- $\dfrac{\langle a_0, \sigma \rangle \to n_0 \quad \langle a_1, \sigma \rangle \to n_1}{\langle a_0 \leq a_1, \sigma \rangle \to \mathbf{true}} \; n_0{\leq}n_1$
- $\dfrac{\langle a_0, \sigma \rangle \to n_0 \quad \langle a_1, \sigma \rangle \to n_1}{\langle a_0 \leq a_1, \sigma \rangle \to \mathbf{false}} \; n_0{>}n_1$
- $\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \to \mathbf{false}}{\langle \mathbf{not}\ b, \sigma \rangle \to \mathbf{true}}$
- $\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \to \mathbf{true}}{\langle \mathbf{not}\ b, \sigma \rangle \to \mathbf{false}}$
- $\dfrac{\langle b_0, \sigma \rangle \to t_0 \quad \langle b_1, \sigma \rangle \to t_1}{\langle b_0\ \mathbf{and}\ b_1, \sigma \rangle \to \mathbf{true}} \; t_0{=}\mathbf{true} \wedge t_1{=}\mathbf{true}$
- $\dfrac{\langle b_0, \sigma \rangle \to t_0 \quad \langle b_1, \sigma \rangle \to t_1}{\langle b_0\ \mathbf{and}\ b_1, \sigma \rangle \to \mathbf{false}} \; t_0{=}\mathbf{false} \vee t_1{=}\mathbf{false}$
- $\dfrac{\langle b_0, \sigma \rangle \to t_0 \quad \langle b_1, \sigma \rangle \to t_1}{\langle b_0\ \mathbf{or}\ b_1, \sigma \rangle \to \mathbf{true}} \; t_0{=}\mathbf{true} \vee t_1{=}\mathbf{true}$
- $\dfrac{\langle b_0, \sigma \rangle \to t_0 \quad \langle b_1, \sigma \rangle \to t_1}{\langle b_0\ \mathbf{or}\ b_1, \sigma \rangle \to \mathbf{false}} \; t_0{=}\mathbf{false} \wedge t_1{=}\mathbf{false}$

Příkazy Com

$\langle c, \sigma \rangle \to \sigma'$ „příkaz c aktivovaný ve stavu σ skončí ve stavu σ'“

- $\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \to \sigma$
- $\dfrac{\langle a, \sigma \rangle \to n}{\langle X := a, \sigma \rangle \to \sigma[n/X]}$
- $\dfrac{\langle c_0, \sigma \rangle \to \sigma'' \quad \langle c_1, \sigma'' \rangle \to \sigma'}{\langle c_0; c_1, \sigma \rangle \to \sigma'}$
- $\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \to \mathbf{true} \quad \langle c_0, \sigma \rangle \to \sigma'}{\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma \rangle \to \sigma'} \qquad \dfrac{\langle b, \sigma \rangle \to \mathbf{false} \quad \langle c_1, \sigma \rangle \to \sigma'}{\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma \rangle \to \sigma'}$
- $\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \to \mathbf{false}}{\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \to \sigma} \qquad \dfrac{\langle b, \sigma \rangle \to \mathbf{true} \quad \langle c, \sigma \rangle \to \sigma'' \quad \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma'' \rangle \to \sigma'}{\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \to \sigma'}$

Příklad důkazového stromu v SOS sémantice 1. typu

Uvažme program $\mathbf{while}\ A \leq 2\ \mathbf{do}\ A := A + C$

- Stav σ je definován takto: $\sigma(A) = 1$, $\sigma(C) = 2$, a pro $A \neq B \neq C$ je $\sigma(B) = 10$. Pak $\langle \mathbf{while}\ A \leq 2\ \mathbf{do}\ A := A + C, \sigma \rangle \to \sigma[3/A]$, neboť

$$\dfrac{\dfrac{\langle A, \sigma \rangle \to 1 \quad \langle 2, \sigma \rangle \to 2}{\langle A \leq 2, \sigma \rangle \to \mathbf{true}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle A, \sigma \rangle \to 1 \quad \langle C, \sigma \rangle \to 2}{\langle A + C, \sigma \rangle \to 3}}{\langle A := A + C, \sigma \rangle \to \sigma[3/A]} \quad \dfrac{\dfrac{\langle A, \sigma[3/A] \rangle \to 3 \quad \langle 2, \sigma[3/A] \rangle \to 2}{\langle A \leq 2, \sigma[3/A] \rangle \to \mathbf{false}}}{\langle \mathbf{while}\ A \leq 2\ \mathbf{do}\ A := A + C, \sigma[3/A] \rangle \to \sigma[3/A]}}{\langle \mathbf{while}\ A \leq 2\ \mathbf{do}\ A := A + C, \sigma \rangle \to \sigma[3/A]}$$

- Stav $\sigma' = \sigma[0/C]$. Důkazový strom s kořenem tvaru $\langle \mathbf{while}\ A \leq 2\ \mathbf{do}\ A := A + C, \sigma' \rangle \to \sigma''$ sestrojit nelze (pro žádné σ'').

SOS sémantika prvního typu je deterministická

Věta 1.

1. *Pro každé* $a \in \mathbf{Aexp}$ *a* $\sigma \in \Sigma$ *existuje právě jedno* $n \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $\langle a, \sigma\rangle \to n$.
2. *Pro každé* $b \in \mathbf{Bexp}$ *a* $\sigma \in \Sigma$ *existuje právě jedno* $t \in \mathbb{T}$ *takové, že* $\langle b, \sigma\rangle \to t$.
3. *Pro každé* $c \in \mathbf{Com}$ *a* $\sigma \in \Sigma$ *existuje nejvýše jedno* $\sigma' \in \Sigma$ *takové, že* $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma'$.

Důkaz. 1. a 2. indukcí ke struktuře a a b, 3. indukcí k výšce odvození $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma'$.

ad 1.

- $a \equiv n$. Pak $\langle n, \sigma\rangle \to n$ dle definice.
- $a \equiv X$. Pak $\langle X, \sigma\rangle \to \sigma(X)$ dle definice.
- $a \equiv a_0 + a_1$. Podle indukčního předpokladu existuje právě jedno n_0 takové, že $\langle a_0, \sigma\rangle \to n_0$, a právě jedno n_1 takové, že $\langle a_1, \sigma\rangle \to n_1$. Proto $\langle a_0 + a_1, \sigma\rangle \to n$, kde $n = n_0 + n_1$.
- $a \equiv a_0 - a_1$. Podobně.
- $a \equiv a_0 * a_1$. Podobně.

ad 3. Indukcí k výšce odvození ukážeme, že pokud pro dané c a σ existuje (nějaké) σ' takové, že $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma'$, je toto σ' určeno jednoznačně.

Nechť $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma'$ je kořen důkazového stromu výšky $n \in \mathbb{N}_0$. Uvážíme možné tvary c.

- $\langle \mathbf{skip}, \sigma\rangle \to \sigma$.
- $c \equiv X := a$. Pak kořen $\langle X := a, \sigma\rangle \to \sigma'$ má následníka $\langle a, \sigma\rangle \to n$ a platí $\sigma' = \sigma[n/X]$. Podle 1. existuje právě jedno takové n, proto σ' je určeno jednoznačně.
- $c \equiv c_0; c_1$. Pak kořen $\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \to \sigma'$ má následníky $\langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma''$ a $\langle c_1, \sigma''\rangle \to \sigma'$. Podle indukčního předpokladu je σ'' i σ' určeno jednoznačně.
- $c \equiv \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1$. Pak kořen $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \to \sigma'$ má buď následníky $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true}$ a $\langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma'$, nebo $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{false}$ a $\langle c_1, \sigma\rangle \to \sigma'$. Podle 2. nastává právě jedna z těchto možností, proto je σ' určeno jednoznačně.
- $c \equiv \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c$. Pak kořen $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \to \sigma'$ má buď jediného následníka $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{false}$ a $\sigma' = \sigma$, nebo tři následníky $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true}$, $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma''$ a $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma''\rangle \to \sigma'$. Podle 2. nastává právě jedna z těchto možností. V prvním případě jsme hotovi ihned; v druhém použijeme indukční předpoklad podle něhož je σ'' a σ' určeno jednoznačně.

Sémantická ekvivalence výrazů a příkazů (I)

- Aritmetické výrazy **Aexp**

$$a_0 \sim a_1 \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall \sigma \in \Sigma : \langle a_0, \sigma\rangle \to n \iff \langle a_1, \sigma\rangle \to n)$$

- Pravdivostní výrazy **Bexp**

$$b_0 \sim b_1 \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall t \in \mathbb{T}\ \forall \sigma \in \Sigma : \langle b_0, \sigma\rangle \to t \iff \langle b_1, \sigma\rangle \to t)$$

- Příkazy **Com**

$$c_0 \sim c_1 \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma : \langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma' \iff \langle c_1, \sigma\rangle \to \sigma')$$

Příklad ekvivaletních programů

Dokážeme, že $\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c \quad \sim \quad \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (c; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c)\ \textbf{else skip}$

- $\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c, \sigma\rangle \to \sigma' \quad \Rightarrow \quad \langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (c; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c)\ \textbf{else skip}, \sigma\rangle \to \sigma'$

  Jsou dvě možnosti:

$\star$ $\dfrac{\dfrac{\cdots}{\langle b, \sigma\rangle \to \textbf{false}}}{\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c, \sigma\rangle \to \sigma}$. Pak ale také $\dfrac{\dfrac{\cdots}{\langle b, \sigma\rangle \to \textbf{false}} \qquad \langle \textbf{skip}, \sigma\rangle \to \sigma}{\langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (c; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c)\ \textbf{else skip}, \sigma\rangle \to \sigma}$

$\star$ $\dfrac{\dfrac{\cdots}{\langle b, \sigma\rangle \to \textbf{true}} \quad \dfrac{\cdots}{\langle c, \sigma\rangle \to \sigma''} \quad \dfrac{\cdots}{\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c, \sigma''\rangle \to \sigma'}}{\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c, \sigma\rangle \to \sigma'}$. Pak ale také

$$\dfrac{\dfrac{\cdots}{\langle b, \sigma\rangle \to \textbf{true}} \qquad \dfrac{\dfrac{\cdots}{\langle c, \sigma\rangle \to \sigma''} \quad \dfrac{\cdots}{\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c, \sigma''\rangle \to \sigma'}}{\langle c; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c, \sigma\rangle \to \sigma'}}{\langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (c; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c)\ \textbf{else skip}, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

- Opačná implikace se ukáže podobně.

Operační sémantika IMP druhého typu („small step“)

- Cílem je definovat přechodový systém, kde
  - ⋆ množina konfigurací je $\mathbf{Com} \times \Sigma$,
  - ⋆ množina akcí je $\{\tau\}$,
  - ⋆ přechodová relace odpovídá „kroku výpočtu“ programů, tj. $\langle c, \sigma\rangle \xrightarrow{\tau} \langle c', \sigma'\rangle$ právě když program c přejde ze stavu σ vykonáním jedné instrukce do stavu σ' a z tohoto stavu se dále provádí program c'.
- Definujeme odvozovací systémy pro tři relace:
  - ⋆ $\mapsto_A \subseteq (\mathbf{Aexp} \times \Sigma) \times (\mathbf{Aexp} \times \Sigma)$; prvky zapisujeme ve tvaru $\langle a, \sigma\rangle \mapsto_A \langle a', \sigma'\rangle$.
  - ⋆ $\mapsto_B \subseteq (\mathbf{Bexp} \times \Sigma) \times (\mathbf{Bexp} \times \Sigma)$; prvky zapisujeme ve tvaru $\langle b, \sigma\rangle \mapsto_B \langle b', \sigma'\rangle$.
  - ⋆ $\mapsto_C \subseteq (\mathbf{Com} \times \Sigma) \times (\mathbf{Com} \times \Sigma)$; prvky zapisujeme ve tvaru $\langle c, \sigma\rangle \mapsto_C \langle c', \sigma'\rangle$.

  Indexy A, B, C budou obvykle vynechány.
- Pak již lze definovat: $\langle c, \sigma\rangle \xrightarrow{\tau} \langle c', \sigma'\rangle \iff \langle c, \sigma\rangle \mapsto_C \langle c', \sigma'\rangle$

Aritmetické výrazy Aexp

- $\langle n, \sigma\rangle$ – konečná konfigurace
- $\langle X, \sigma\rangle \mapsto \langle \sigma(X), \sigma\rangle$
- $\langle n_0 + n_1, \sigma\rangle \mapsto \langle m, \sigma\rangle$, kde $m = n_0 + n_1$
- $\dfrac{\langle a_0, \sigma\rangle \mapsto \langle a_0', \sigma\rangle}{\langle a_0 + a_1, \sigma\rangle \mapsto \langle a_0' + a_1, \sigma\rangle}$
- $\dfrac{\langle a_1, \sigma\rangle \mapsto \langle a_1', \sigma\rangle}{\langle n + a_1, \sigma\rangle \mapsto \langle n + a_1', \sigma\rangle}$
- podobně pro „$-$“ a „$*$“

Příklad:

- Nechť $\sigma(X) = 1$, $\sigma(Y) = 2$
- $\langle (X + 3) * Y, \sigma\rangle \mapsto \langle (1 + 3) * Y, \sigma\rangle \mapsto \langle 4 * Y, \sigma\rangle \mapsto \langle 4 * 2, \sigma\rangle \mapsto \langle 8, \sigma\rangle$

Pravdivostní výrazy Bexp

- $\langle \mathbf{tt}, \sigma \rangle$ – konečná konfigurace
- $\langle \mathbf{ff}, \sigma \rangle$ – konečná konfigurace
- $\langle n_0{=}n_1, \sigma \rangle \mapsto \langle \mathbf{tt}, \sigma \rangle$, je-li $n_0{=}n_1$
- $\langle n_0{=}n_1, \sigma \rangle \mapsto \langle \mathbf{ff}, \sigma \rangle$, je-li $n_0{\neq}n_1$
- $\dfrac{\langle a_0, \sigma \rangle \mapsto \langle a_0', \sigma \rangle}{\langle a_0 = a_1, \sigma \rangle \mapsto \langle a_0' = a_1, \sigma \rangle}$
- $\dfrac{\langle a_1, \sigma \rangle \mapsto \langle a_1', \sigma \rangle}{\langle n = a_1, \sigma \rangle \mapsto \langle n = a_1', \sigma \rangle}$
- podobně pro „$\leq$“

- $\langle \mathbf{not}\ \ \mathbf{tt}, \sigma \rangle \mapsto \langle \mathbf{ff}, \sigma \rangle$, $\langle \mathbf{not}\ \ \mathbf{ff}, \sigma \rangle \mapsto \langle \mathbf{tt}, \sigma \rangle$
- $\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \mapsto \langle b', \sigma \rangle}{\langle \mathbf{not}\ \ b, \sigma \rangle \mapsto \langle \mathbf{not}\ \ b', \sigma \rangle}$
- $\langle t_1\ \mathbf{and}\ t_2, \sigma \rangle \mapsto \langle \mathbf{tt}, \sigma \rangle$ je-li $t_1{=}\mathbf{tt}$ a $t_2{=}\mathbf{tt}$
- $\langle t_1\ \mathbf{and}\ t_2, \sigma \rangle \mapsto \langle \mathbf{ff}, \sigma \rangle$ je-li $t_1{=}\mathbf{ff}$ nebo $t_2{=}\mathbf{ff}$
- $\dfrac{\langle b_0, \sigma \rangle \mapsto \langle b_0', \sigma \rangle}{\langle b_0\ \mathbf{and}\ b_1, \sigma \rangle \mapsto \langle b_0'\ \mathbf{and}\ b_1, \sigma \rangle}$
- $\dfrac{\langle b_1, \sigma \rangle \mapsto \langle b_1', \sigma \rangle}{\langle t\ \mathbf{and}\ b_1, \sigma \rangle \mapsto \langle t\ \mathbf{and}\ b_1', \sigma \rangle}\ t \in \{\mathbf{tt}, \mathbf{ff}\}$
- podobně pro „**or**“

Příkazy Com

- $\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle$ – konečná konfigurace
- $\langle X := n, \sigma \rangle \mapsto \langle \mathbf{skip}, \sigma[n/X] \rangle$
- $\dfrac{\langle a, \sigma \rangle \mapsto \langle a', \sigma \rangle}{\langle X := a, \sigma \rangle \mapsto \langle X := a', \sigma \rangle}$
- $\langle \mathbf{skip}; c, \sigma \rangle \mapsto \langle c, \sigma \rangle$
- $\dfrac{\langle c_0, \sigma \rangle \mapsto \langle c_0', \sigma' \rangle}{\langle c_0; c_1, \sigma \rangle \mapsto \langle c_0'; c_1, \sigma' \rangle}$
- $\langle \mathbf{if}\ \mathbf{tt}\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma \rangle \mapsto \langle c_0, \sigma \rangle$
- $\langle \mathbf{if}\ \mathbf{ff}\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma \rangle \mapsto \langle c_1, \sigma \rangle$
- $\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \mapsto \langle b', \sigma \rangle}{\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma \rangle \mapsto \langle \mathbf{if}\ b'\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma \rangle}$
- $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \mapsto \langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ (c; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c)\ \mathbf{else}\ \mathbf{skip}, \sigma \rangle$

Sémantická ekvivalence výrazů a příkazů (II)

- Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ definujeme (induktivně) relaci $\mapsto^k \subseteq (\mathbf{Com} \times \Sigma) \times (\mathbf{Com} \times \Sigma)$:

  $\mapsto^0 \quad = \quad id_{\mathbf{Com}\times\Sigma}$
  $\mapsto^{i+1} \quad = \quad \mapsto^i \circ \mapsto$

- Dále definujeme $\mapsto^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mapsto^k$

- Aritmetické výrazy **Aexp**

  $$a_0 \approx a_1 \quad \overset{def}{\iff} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall \sigma \in \Sigma : \langle a_0, \sigma\rangle \mapsto^* \langle n, \sigma\rangle \iff \langle a_1, \sigma\rangle \mapsto^* \langle n, \sigma\rangle)$$

- Pravdivostní výrazy **Bexp**

  $$b_0 \approx b_1 \quad \overset{def}{\iff} \quad (\forall t \in \mathbb{T}\ \forall \sigma \in \Sigma : \langle b_0, \sigma\rangle \mapsto^* \langle t, \sigma\rangle \iff \langle b_1, \sigma\rangle \mapsto^* \langle t, \sigma\rangle)$$

- Příkazy **Com**

  $$c_0 \approx c_1 \quad \overset{def}{\iff} \quad (\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma : \langle c_0, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle \iff \langle c_1, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle)$$

Ekvivalence SOS sémantik 1. a 2. typu

Lema 2.

1. *Jestliže* $\langle a, \sigma\rangle \mapsto^k \langle a', \sigma\rangle$, *pak* $\langle a \odot a_1, \sigma\rangle \mapsto^k \langle a' \odot a_1, \sigma\rangle$ *a* $\langle n \odot a, \sigma\rangle \mapsto^k \langle n \odot a', \sigma\rangle$ *pro každé* $\odot \in \{+, -, *\}$.
2. *Jestliže* $\langle a, \sigma\rangle \mapsto^k \langle a', \sigma\rangle$, *pak* $\langle X := a, \sigma\rangle \mapsto^k \langle X := a', \sigma\rangle$
3. *Jestliže* $\langle c, \sigma\rangle \mapsto^k \langle c', \sigma'\rangle$, *pak* $\langle c; c_1, \sigma\rangle \mapsto^k \langle c'; c_1, \sigma'\rangle$.
4. *Jestliže* $\langle b, \sigma\rangle \mapsto^k \langle b', \sigma\rangle$, *pak* $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \mapsto^k \langle \mathbf{if}\ b'\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle$

Důkaz. Indukcí ke k.

ad 1., první implikace.

- Báze ($k = 0$): $\langle a_0, \sigma\rangle \mapsto^0 \langle a_0', \sigma\rangle \iff a_0' = a_0 \iff \langle a_0 + a_1, \sigma\rangle \mapsto^0 \langle a_0' + a_1, \sigma\rangle$
- Indukční krok:
  $\langle a_0, \sigma\rangle \mapsto^{k+1} \langle a_0', \sigma\rangle \Rightarrow \langle a_0, \sigma\rangle \mapsto \langle a_0'', \sigma\rangle$ a $\langle a_0'', \sigma\rangle \mapsto^k \langle a_0', \sigma\rangle \Rightarrow$
  $\langle a_0, \sigma\rangle \mapsto \langle a_0'', \sigma\rangle$ a $\langle a_0'' + a_1, \sigma\rangle \mapsto^k \langle a_0' + a_1, \sigma\rangle$ (podle I.P.) $\Rightarrow$
  $\langle a_0 + a_1, \sigma\rangle \mapsto \langle a_0'' + a_1, \sigma\rangle$ a $\langle a_0'' + a_1, \sigma\rangle \mapsto^k \langle a_0' + a_1, \sigma\rangle \Rightarrow$
  $\langle a_0 + a_1, \sigma\rangle \mapsto^{k+1} \langle a_0' + a_1, \sigma\rangle$

ad 2.,3.,4. Podobně. □

Lema 3.

1. *Jestliže* $\langle a_0 \odot a_1, \sigma\rangle \mapsto^k \langle n, \sigma\rangle$ *kde* $\odot \in \{+, -, *\}$, *pak* $\langle a_0 \odot a_1, \sigma\rangle \mapsto^l \langle n_0 \odot a_1, \sigma\rangle \mapsto^m \langle n_0 \odot n_1, \sigma\rangle \mapsto \langle n, \sigma\rangle$, *kde* $n = n_0 \odot n_1$, $\langle a_0, \sigma\rangle \mapsto^l \langle n_0, \sigma\rangle$ *a* $\langle a_1, \sigma\rangle \mapsto^m \langle n_1, \sigma\rangle$.
2. *Jestliže* $\langle X := a, \sigma\rangle \mapsto^k \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$, *pak* $\langle X := a, \sigma\rangle \mapsto^{k-1} \langle X := n, \sigma\rangle \mapsto \langle \mathbf{skip}, \sigma[n/X]\rangle$, *kde* $\sigma' = \sigma[n/X]$ *a* $\langle a, \sigma\rangle \mapsto^{k-1} \langle n, \sigma\rangle$.
3. *Jestliže* $\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \mapsto^k \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$, *pak* $\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \mapsto^l \langle \mathbf{skip}; c_1, \sigma''\rangle \mapsto \langle c_1, \sigma''\rangle \mapsto^m \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$, *kde* $l, m < k$ *a* $\langle c_0, \sigma\rangle \mapsto^l \langle \mathbf{skip}, \sigma''\rangle$.
4. *Jestliže* $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \mapsto^k \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$, *pak platí jedna z následujících možností:*
   - $\star$ $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \mapsto^l \langle \mathbf{if}\ \mathbf{tt}\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \mapsto \langle c_0, \sigma\rangle \mapsto^m \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$, *kde* $l, m < k$ *a* $\langle b, \sigma\rangle \mapsto^l \langle \mathbf{tt}, \sigma\rangle$.
   - $\star$ $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \mapsto^l \langle \mathbf{if}\ \mathbf{ff}\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \mapsto \langle c_1, \sigma\rangle \mapsto^m \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$, *kde* $l, m < k$ *a* $\langle b, \sigma\rangle \mapsto^l \langle \mathbf{ff}, \sigma\rangle$.

Důkaz. Indukcí ke k.

ad 1. Báze indukce ($k = 0$)

- Jelikož $\langle a_0 \odot a_1, \sigma\rangle \not\mapsto^0 \langle n, \sigma\rangle$, implikace platí.

Indukční krok:

- Jestliže $a_0 \notin \mathbf{Num}$, pak $\langle a_0 \odot a_1, \sigma\rangle \mapsto \langle a_0' \odot a_1, \sigma\rangle \mapsto^{k-1} \langle n, \sigma\rangle$, kde $\langle a_0, \sigma\rangle \mapsto \langle a_0', \sigma\rangle$. Podle I.P. platí $\langle a_0' \odot a_1, \sigma\rangle \mapsto^l \langle n_0 \odot a_1, \sigma\rangle \mapsto^m \langle n_0 \odot n_1, \sigma\rangle \mapsto \langle n, \sigma\rangle$, kde $l, m < k - 1$, $\langle a_0', \sigma\rangle \mapsto^l \langle n_0, \sigma\rangle$ a $\langle a_1, \sigma\rangle \mapsto^m \langle n_1, \sigma\rangle$. Proto také $\langle a_0 \odot a_1, \sigma\rangle \mapsto^{l+1} \langle n_0 \odot a_1, \sigma\rangle \mapsto^m \langle n_0 \odot n_1, \sigma\rangle \mapsto \langle n, \sigma\rangle$, kde $l + 1, m < k$ a $\langle a_0, \sigma\rangle \mapsto^{l+1} \langle n_0, \sigma\rangle$.
- Jestliže $a_0 \equiv n_0$ a $a_1 \notin \mathbf{Num}$, pak $\langle n_0 \odot a_1, \sigma\rangle \mapsto \langle n_0 \odot a_1', \sigma\rangle \mapsto^{k-1} \langle n, \sigma\rangle$, kde $\langle a_1, \sigma\rangle \mapsto \langle a_1', \sigma\rangle$. Podle I.P. platí $\langle n_0 \odot a_1', \sigma\rangle \mapsto^l \langle n_0 \odot a_1', \sigma\rangle \mapsto^m \langle n_0 \odot n_1, \sigma\rangle \mapsto \langle n, \sigma\rangle$, kde $l, m < k-1$ (v tomto případě $l = 0$) a $\langle a_1', \sigma\rangle \mapsto^m \langle n_1, \sigma\rangle$. Zbytek důkazu je podobný jako výše.
- Jestliže $a_0 \equiv n_0$ a $a_1 \equiv n_1$, stačí položit $l = m = 0$.

□

Věta 4.

1. *Pro každé* a, σ *a* n *platí:* $\langle a, \sigma\rangle \to n \iff \langle a, \sigma\rangle \mapsto^* \langle n, \sigma\rangle$
2. *Pro každé* b *a* σ *platí:*
   - $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true} \iff \langle b, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{tt}, \sigma\rangle$
   - $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{false} \iff \langle b, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{ff}, \sigma\rangle$
3. *Pro každé* c *a* σ, σ' *platí:* $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma' \iff \langle c, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$

Důkaz. 1. a 2. indukcí ke struktuře a a b.

ad 1.

- $a \equiv n$. Pak $\langle n, \sigma\rangle \to n$ a $\langle n, \sigma\rangle \mapsto^0 \langle n, \sigma\rangle$ dle definice.

- $a \equiv X$. Pak $\langle X, \sigma\rangle \to \sigma(X)$ a $\langle X, \sigma\rangle \mapsto \langle \sigma(X), \sigma\rangle$ dle definice.
- $a \equiv a_0 + a_1$. Podle I.P. platí
  - $\langle a_0, \sigma\rangle \to n_0 \iff \langle a_0, \sigma\rangle \mapsto^* \langle n_0, \sigma\rangle$
  - $\langle a_1, \sigma\rangle \to n_1 \iff \langle a_1, \sigma\rangle \mapsto^* \langle n_1, \sigma\rangle$

  Dále

  $\langle a_0 + a_1, \sigma\rangle \to n \iff$

  $\langle a_0, \sigma\rangle \to n_0$ a $\langle a_1, \sigma\rangle \to n_1$ kde $n = n_0 + n_1 \iff$

  $\langle a_0, \sigma\rangle \mapsto^* \langle n_0, \sigma\rangle$ a $\langle a_1, \sigma\rangle \mapsto^* \langle n_1, \sigma\rangle$ kde $n = n_0 + n_1$ (podle I.P.) $\iff$

  $\langle a_0 + a_1, \sigma\rangle \mapsto^* \langle n_0 + a_1\rangle \mapsto^* \langle n_0 + n_1, \sigma\rangle \mapsto \langle n, \sigma\rangle$ kde $n = n_0 + n_1$ (lema 2 (1)) $\iff$

  $\langle a_0 + a_1, \sigma\rangle \mapsto^* \langle n, \sigma\rangle$ (podle lematu 3 (1))
- $a \equiv a_0 - a_1$. Podobně.
- $a \equiv a_0 * a_1$. Podobně.

ad 3.

($\Rightarrow$) Indukcí k výšce odvození $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma'$. Uvážíme možné tvary c.

- $\langle \mathbf{skip}, \sigma\rangle \to \sigma$. Platí $\langle \mathbf{skip}, \sigma\rangle \mapsto^0 \langle \mathbf{skip}, \sigma\rangle$
- $c \equiv X := a$. Pak kořen $\langle X := a, \sigma\rangle \to \sigma'$ má následníka $\langle a, \sigma\rangle \to n$ a platí $\sigma' = \sigma[n/X]$. Podle 1. $\langle a, \sigma\rangle \mapsto^* \langle n, \sigma\rangle$, proto $\langle X := a, \sigma\rangle \mapsto^* \langle X := n, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{skip}, \sigma[n/X]\rangle$ podle lematu 2 (2).

- $c \equiv c_0; c_1$. Pak kořen $\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \to \sigma'$ má následníky $\langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma''$ a $\langle c_1, \sigma''\rangle \to \sigma'$. Podle indukčního předpokladu $\langle c_0, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{skip}, \sigma''\rangle$ a $\langle c_1, \sigma''\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$. Podle lematu 2 (3) platí $\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{skip}; c_1, \sigma''\rangle \mapsto \langle c_1, \sigma''\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$.
- $c \equiv \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1$. Pak kořen $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \to \sigma'$ má buď následníky $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true}$ a $\langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma'$, nebo $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{false}$ a $\langle c_1, \sigma\rangle \to \sigma'$. V prvém případě $\langle b, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{tt}, \sigma\rangle$ a $\langle c_0, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$ (podle I.P. a 2.), tedy $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{if\ tt\ then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \mapsto \langle c_0, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$ podle lematu 2 (4). Druhý případ se dokáže podobně.
- $c \equiv \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c$. Pak kořen $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \to \sigma'$ má buď jediného následníka $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{false}$ a $\sigma' = \sigma$, nebo tři následníky $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true}$, $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma''$ a $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma''\rangle \to \sigma'$. V prvním případě $\langle b, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{ff}, \sigma\rangle$ podle 2., proto $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \mapsto \langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ (c; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c)\ \mathbf{else\ skip}, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{if\ ff\ then}\ (c; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c)\ \mathbf{else\ skip}, \sigma\rangle \mapsto \langle \mathbf{skip}, \sigma\rangle$ podle lematu 2 (4). V druhém případě $\langle b, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{tt}, \sigma\rangle$, $\langle c, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{skip}, \sigma''\rangle$ a $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma''\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$ podle 2. a I.P. Proto také $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \mapsto \langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ (c; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c)\ \mathbf{else\ skip}, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{if\ tt\ then}\ (c; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c)\ \mathbf{else\ skip}, \sigma\rangle \mapsto \langle c; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma''\rangle \mapsto^* \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$ podle lematu 2.

($\Leftarrow$) Indukcí ke k pro které $\langle c, \sigma\rangle \mapsto^k \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$.

Báze indukce:

- $\langle \mathbf{skip}, \sigma\rangle \mapsto^0 \langle \mathbf{skip}, \sigma\rangle$. Platí $\langle \mathbf{skip}, \sigma\rangle \to \sigma$.

Indukční krok: Nechť $\langle c, \sigma\rangle \mapsto^k \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$ kde $k \geq 1$. Uvážíme možné tvary c.

- $c \equiv X := a$. Pak $\langle X := a, \sigma\rangle \mapsto^{k-1} \langle X := n, \sigma\rangle \mapsto \langle \mathbf{skip}, \sigma[n/X]\rangle$, kde $\langle a, \sigma\rangle \mapsto^{k-1} \langle n, \sigma\rangle$ (podle lematu 3 (2)). Proto také $\langle a, \sigma\rangle \to n$ podle 1. Tedy $\langle X := a, \sigma\rangle \to \sigma[n/X]$.
- $c \equiv c_0; c_1$. Pak $\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \mapsto^{l} \langle \mathbf{skip}; c_1, \sigma''\rangle \mapsto \langle c_1, \sigma''\rangle \mapsto^{m} \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$ kde $l, m < k$ a $\langle c_0, \sigma\rangle \mapsto^{l} \langle \mathbf{skip}, \sigma''\rangle$ podle lematu 3 (3). Podle I.P. $\langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma''$ a $\langle c_1, \sigma''\rangle \to \sigma'$, tedy $\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \to \sigma'$.
- $c \equiv \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1$. Podle lematu 3 (4) jsou dvě možnosti:
  - $\star$ $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \mapsto^{l} \langle \mathbf{if}\ \mathbf{tt}\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \mapsto \langle c_0, \sigma\rangle \mapsto^{m} \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$, kde $l, m < k$ a $\langle b, \sigma\rangle \mapsto^{l} \langle \mathbf{tt}, \sigma\rangle$ (podle lematu 3 (4)). Dále podle 2. a I.P. platí $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true}$ a $\langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma'$, tedy také $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \to \sigma'$.
  - $\star$ Druhá možnost se ověří podobně.
- $c \equiv \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c$. Pak $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \mapsto \langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ (c; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c)\ \mathbf{else}\ \mathbf{skip}, \sigma\rangle$. Podle lematu 3 (4) jsou dvě možnosti:
  - $\star$ $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ (c; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c)\ \mathbf{else}\ \mathbf{skip}, \sigma\rangle \mapsto^{l} \langle \mathbf{if}\ \mathbf{tt}\ \mathbf{then}\ (c; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c)\ \mathbf{else}\ \mathbf{skip}, \sigma\rangle \mapsto \langle c; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \mapsto^{m} \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$, kde $l, m < k$ a $\langle b, \sigma\rangle \mapsto^{l} \langle \mathbf{tt}, \sigma\rangle$. Opětovným použitím lematu 3 (3) dostáváme $\langle c; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \mapsto^{l'} \langle \mathbf{skip}; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma''\rangle \mapsto \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma''\rangle \mapsto^{m'} \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$, kde $l', m' < m < k$ a $\langle c, \sigma\rangle \mapsto^{l'} \langle \mathbf{skip}, \sigma''\rangle$. Podle 2. a I.P. dostáváme $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true}$, $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma''$ a $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma''\rangle \to \sigma'$, proto $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \to \sigma'$.

  - $\star$ $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ (c; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c)\ \mathbf{else}\ \mathbf{skip}, \sigma\rangle \mapsto^{l} \langle \mathbf{if}\ \mathbf{ff}\ \mathbf{then}\ (c; \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c)\ \mathbf{else}\ \mathbf{skip}, \sigma\rangle \mapsto \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle \mapsto^{m} \langle \mathbf{skip}, \sigma'\rangle$, kde $l, m < k$ a $\langle b, \sigma\rangle \mapsto^{l} \langle \mathbf{ff}, \sigma\rangle$ (v tomto případě je $m = 0$ a $\sigma' = \sigma$). Podle 2. platí $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{false}$ a tedy $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \to \sigma$.

Denotační sémantika IMP

- $\mathcal{A} : \mathbf{Aexp} \to (\Sigma \to \mathbb{Z})$
- $\mathcal{B} : \mathbf{Bexp} \to (\Sigma \to \mathbb{T})$
- $\mathcal{C} : \mathbf{Com} \to (\Sigma \to \Sigma)$

Argumenty funkcí $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ se píší do „sémantických“ závorek $[\![\ ]\!]$

Aritmetické výrazy Aexp

- $\mathcal{A}[\![n]\!]\sigma = n$
- $\mathcal{A}[\![X]\!]\sigma = \sigma(X)$
- $\mathcal{A}[\![a_0 + a_1]\!]\sigma = \mathcal{A}[\![a_0]\!]\sigma + \mathcal{A}[\![a_1]\!]\sigma$
- $\mathcal{A}[\![a_0 - a_1]\!]\sigma = \mathcal{A}[\![a_0]\!]\sigma - \mathcal{A}[\![a_1]\!]\sigma$
- $\mathcal{A}[\![a_0 * a_1]\!]\sigma = \mathcal{A}[\![a_0]\!]\sigma * \mathcal{A}[\![a_1]\!]\sigma$

Pravdivostní výrazy Bexp

- $\mathcal{B}[\![\mathbf{tt}]\!]\sigma = \mathbf{true}$
- $\mathcal{B}[\![\mathbf{ff}]\!]\sigma = \mathbf{false}$
- $\mathcal{B}[\![a_0 = a_1]\!]\sigma = \mathcal{A}[\![a_0]\!]\sigma = \mathcal{A}[\![a_1]\!]\sigma$
- $\mathcal{B}[\![a_0 \leq a_1]\!]\sigma = \mathcal{A}[\![a_0]\!]\sigma \leq \mathcal{A}[\![a_1]\!]\sigma$
- $\mathcal{B}[\![\mathbf{not}\ b]\!]\sigma = \neg\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma$
- $\mathcal{B}[\![b_0\ \mathbf{and}\ b_1]\!]\sigma = \mathcal{B}[\![b_0]\!]\sigma \wedge \mathcal{B}[\![b_1]\!]\sigma$
- $\mathcal{B}[\![b_0\ \mathbf{or}\ b_1]\!]\sigma = \mathcal{B}[\![b_0]\!]\sigma \vee \mathcal{B}[\![b_1]\!]\sigma$

Příkazy Com

- $\mathcal{C}[\![\mathbf{skip}]\!]\sigma = \sigma$
- $\mathcal{C}[\![X := a]\!]\sigma = \sigma[\mathcal{A}[\![a]\!]\sigma/X]$
- $\mathcal{C}[\![c_0; c_1]\!]\sigma = \mathcal{C}[\![c_1]\!](\mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma) = (\mathcal{C}[\![c_1]\!] \circ \mathcal{C}[\![c_0]\!])\sigma$
- $\mathcal{C}[\![\mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1]\!]\sigma = \begin{cases} \mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma & \text{jestliže } \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \mathbf{true} \\ \mathcal{C}[\![c_1]\!]\sigma & \text{jestliže } \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \mathbf{false} \end{cases}$
- $\mathcal{C}[\![\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c]\!]\sigma = ???$

Úplné částečné uspořádání (CPO)

- Uspořádaná množina $(D, \sqsubseteq)$ je CPO, pokud každý nekonečný řetěz

  $$d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq d_3 \cdots$$

  prvků z D má v D suprémum.

  Příklady:

- Každá konečná uspořádaná množina je CPO.
- Každá množina M uspořádaná identitou je CPO (tzv. diskrétní CPO).
- Je-li M množina, je $(2^M, \subseteq)$ CPO.
- Každý úplný svaz je CPO.
- $(\Sigma \to \Sigma, \subseteq)$ je CPO.
  - $f \subseteq g$ je-li g „více definovaná“ než f.

Monotónní a spojité funkce

- Nechť $(D, \sqsubseteq)$, $(E, \preceq)$ jsou CPO, $f : D \to E$ totální funkce. f je monotónní, jestliže pro každé $a, b \in D$ platí:

  $$a \sqsubseteq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \preceq f(b).$$

  f je spojitá, je-li monotónní a pro každý nekonečný řetěz

  $$a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq a_2 \sqsubseteq a_3 \cdots$$

  prvků z D platí

  $$\bigvee_{i \in \mathbb{N}} f(a_i) = f(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} a_i)$$

Příklad:

- Každá funkce z diskrétního CPO je spojitá.

Postačující podmínka spojitosti

Věta 5. *Buď M množina, $f : 2^M \to 2^M$ taková, že pro každé $A \subseteq M$ platí*

$$f(A) = \bigcup_{a \in A} f(\{a\})$$

Pak f je spojitá funkce na CPO $(2^M, \subseteq)$.

Důkaz.

- Monotonie: Nechť $A \subseteq B$. Pak

$$f(A) \quad = \quad \bigcup_{a \in A} f(\{a\}) \quad \subseteq \quad \bigcup_{a \in B} f(\{a\}) \quad = \quad f(B).$$

- Spojitost: Buď $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq A_4 \cdots$ nekonečný řetěz podmnožin M. Pak

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(A_i) \quad = \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in A_i} f(\{a\}) \quad = \quad f(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i).$$

□

Věta o pevném bodě

Věta 6. *Buď $(D, \sqsubseteq)$ CPO mající nejmenší prvek $\bot$ a Γ spojitá funkce na D. Položme*

$$\mu\Gamma \quad = \quad \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} \Gamma^i(\bot).$$

Pak $\mu\Gamma$ je nejmenší pevný bod Γ.

Důkaz.

- $\mu\Gamma$ je pevný bod Γ: Pro každé $i \in \mathbb{N}_0$ platí $\Gamma^i(\bot) \sqsubseteq \Gamma^{i+1}(\bot)$ (snadno indukcí k i, použije se monotonie Γ). Dále

$$\Gamma(\mu\Gamma) \quad = \quad \Gamma(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} \Gamma^i(\bot)) \quad = \quad \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} \Gamma^{i+1}(\bot) \quad = \quad \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} \Gamma^i(\bot) \quad = \quad \mu\Gamma$$

- $\mu\Gamma$ je nejmenší pevný bod Γ: Buď d pevný bod Γ (tj. $\Gamma(d) = d$). Stačí ukázat, že d je horní závora množiny $\{\Gamma^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Pak $\mu\Gamma \sqsubseteq d$ podle definice supréma.

  Indukcí k i dokážeme, že $\Gamma^i(\bot) \sqsubseteq d$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$. Zřejmě $\Gamma^0(\bot) = \bot \sqsubseteq d$; a platí-li $\Gamma^i(\bot) \sqsubseteq d$, pak také $\Gamma^{i+1}(\bot) \sqsubseteq \Gamma(d) = d$ neboť Γ je monotónní a d je pevný bod.

□

Denotační sémantika while cyklu

- Označme $w \equiv \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c$.
- Platí $w \sim \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ c; w\ \textbf{else skip}$ (viz strana 22).
- Proto by mělo platit také $\mathcal{C}[\![w]\!] = \mathcal{C}[\![\textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ c; w\ \textbf{else skip}]\!]$
- Tedy

$$\begin{aligned}\mathcal{C}[\![w]\!] &= \{(\sigma,\sigma') \mid \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \textbf{true} \wedge (\sigma,\sigma') \in \mathcal{C}[\![c; w]\!]\} \\ &\cup \{(\sigma,\sigma) \mid \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \textbf{false}\} \\ &= \{(\sigma,\sigma') \mid \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \textbf{true} \wedge (\sigma,\sigma') \in \mathcal{C}[\![w]\!] \circ \mathcal{C}[\![c]\!]\} \\ &\cup \{(\sigma,\sigma) \mid \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \textbf{false}\}\end{aligned}$$

- Tuto rovnost nelze chápat definitoricky, ale lze na ni nahlížet jako na „návod“, jak pro danou aproximaci $\mathcal{C}[\![w]\!]$ spočítat „lepší“ aproximaci.
- Definujeme funkci $\Gamma : (\Sigma \to \Sigma) \to (\Sigma \to \Sigma)$ předpisem

$$\begin{aligned}\Gamma(\varphi) &= \{(\sigma,\sigma') \mid \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \textbf{true} \wedge (\sigma,\sigma') \in \varphi \circ \mathcal{C}[\![c]\!]\} \\ &\cup \{(\sigma,\sigma) \mid \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \textbf{false}\}\end{aligned}$$

- Γ je totální a spojitá funkce na CPO $(\Sigma \to \Sigma, \subseteq)$, neboť

$$\Gamma(\varphi) = \bigcup_{(\sigma,\sigma')\in\varphi} \{\Gamma(\{(\sigma,\sigma')\})\}$$

  a lze tedy aplikovat větu 5.
- $\mathcal{C}[\![w]\!]$ by mělo být pevným bodem funkce Γ, tj. $\Gamma(\mathcal{C}[\![w]\!]) = \mathcal{C}[\![w]\!]$.
- Γ může mít více pevných bodů; má-li však $\mathcal{C}[\![w]\!]$ odpovídat intuitivnímu významu **while** cyklu, je třeba definovat

$$\mathcal{C}[\![w]\!] = \mu\Gamma$$

  Nejmenší pevný bod Γ existuje podle věty 6 a vypadá takto:

$$\mu\Gamma = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} \Gamma^i(\emptyset)$$

- Pozorování: $(\sigma,\sigma') \in \Gamma^i(\emptyset)$ právě když **while** b **do** c aktivovaný ve stavu σ skončí po nejvýše $i-1$ iteracích ve stavu σ'.

Denotační sémantika **while** cyklu – příklady

- **while** $X \leq 1$ **do** $X := X + 1$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0(\emptyset) &= \emptyset \\
\Gamma^1(\emptyset) &= \{(\sigma, \sigma) \mid \sigma(X) > 1\} \\
\Gamma^2(\emptyset) &= \Gamma^1(\emptyset) \cup \{(\sigma, \sigma[2/X]) \mid \sigma(X) = 1\} \\
\Gamma^3(\emptyset) &= \Gamma^2(\emptyset) \cup \{(\sigma, \sigma[2/X]) \mid \sigma(X) = 0\} \\
\Gamma^4(\emptyset) &= \Gamma^3(\emptyset) \cup \{(\sigma, \sigma[2/X]) \mid \sigma(X) = -1\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

  Obecně $\Gamma^{i+1}(\emptyset) = \Gamma^i(\emptyset) \cup \{(\sigma, \sigma[2/X]) \mid \sigma(X) = 2 - i\}$ pro každé $i \geq 1$.

- **while tt do** $X := X + 1$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0(\emptyset) &= \emptyset \\
\Gamma^1(\emptyset) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

  V tomto případě tedy $\mu\Gamma = \Gamma^0(\emptyset) = \emptyset$.

- **while ff do** $X := X + 1$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0(\emptyset) &= \emptyset \\
\Gamma^1(\emptyset) &= \{(\sigma, \sigma) \mid \sigma \in \Sigma\} \\
\Gamma^2(\emptyset) &= \{(\sigma, \sigma) \mid \sigma \in \Sigma\}
\end{aligned}
$$

  V tomto případě tedy $\mu\Gamma = \Gamma^1(\emptyset)$.

Ekvivalence operační a denotační sémantiky

Věta 7.

1. *Pro každé* a, σ *a* n *platí:* $\langle a, \sigma\rangle \to n \iff \mathcal{A}[\![a]\!]\sigma = n$
2. *Pro každé* b, σ *a* t *platí:* $\langle b, \sigma\rangle \to t \iff \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = t$
3. *Pro každé* c *a* σ, σ' *platí:* $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma' \iff \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma = \sigma'$

Důkaz. 1. a 2. indukcí ke struktuře a a b.

ad 3., „$\Rightarrow$“ Indukcí k výšce odvození $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma'$. Uvážíme možné tvary c.

- $\langle \mathbf{skip}, \sigma\rangle \to \sigma$. Platí $\mathcal{C}[\![\mathbf{skip}]\!]\sigma = \sigma$ podle definice.
- $c \equiv X := a$. Pak kořen $\langle X := a, \sigma\rangle \to \sigma'$ má následníka $\langle a, \sigma\rangle \to n$ a platí $\sigma' = \sigma[n/X]$. Podle 1. $\mathcal{A}[\![a]\!]\sigma = n$ a $\mathcal{C}[\![X := a]\!]\sigma = \sigma[n/X]$ dle definice.
- $c \equiv c_0; c_1$. Pak kořen $\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \to \sigma'$ má následníky $\langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma''$ a $\langle c_1, \sigma''\rangle \to \sigma'$. Podle I.P. $\mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma = \sigma''$ a $\mathcal{C}[\![c_1]\!]\sigma'' = \sigma'$, proto $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c_1]\!] \circ \mathcal{C}[\![c_0]\!] = \mathcal{C}[\![c_0; c_1]\!]$.
- $c \equiv \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1$. Pak kořen $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \to \sigma'$ má buď následníky $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true}$ a $\langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma'$, nebo $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{false}$ a $\langle c_1, \sigma\rangle \to \sigma'$. V prvém případě $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \mathbf{true}$ a $\mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma = \sigma'$ (podle I.P. a 2.), tedy $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![\mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1]\!]$ podle definice. Druhý případ se dokáže podobně.

- $c \equiv \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c$. Pak kořen $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \to \sigma'$ má buď
  - ⋆ jediného následníka $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{false}$ a platí $\sigma' = \sigma$. Pak $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \mathbf{false}$ podle 2., proto $(\sigma, \sigma) \in \Gamma(\emptyset) \subseteq \mu\Gamma$;
  - ⋆ nebo tři následníky $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true}$, $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma''$ a $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma''\rangle \to \sigma'$. Pak $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \mathbf{true}$ podle 2. a $(\sigma, \sigma'') \in \mathcal{C}[\![c]\!]$, $(\sigma'', \sigma') \in \mathcal{C}[\![\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c]\!]$ podle I.P. Podle definice $\mu\Gamma$ existuje $k \in \mathbb{N}_0$ takové, že $(\sigma'', \sigma') \in \Gamma^k(\emptyset)$. Dále podle definice Γ dostáváme, že $(\sigma, \sigma') \in \Gamma^{k+1}(\emptyset)$, tedy $(\sigma, \sigma') \in \mu\Gamma$.

„$\Leftarrow$“ Indukcí ke struktuře c.

- $c \equiv \mathbf{skip}$. Platí $\mathcal{C}[\![\mathbf{skip}]\!]\sigma = \sigma$ a $\langle \mathbf{skip}, \sigma\rangle \to \sigma$ podle definice.
- $c \equiv X := a$. Platí $\mathcal{C}[\![X := a]\!]\sigma = \sigma[n/X]$ kde $\mathcal{A}[\![a]\!]\sigma = n$. Podle 1. $\langle a, \sigma\rangle \to n$, proto $\langle X := a, \sigma\rangle \to \sigma[n/X]$.
- $c \equiv c_0; c_1$. Jestliže $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c_0; c_1]\!] = \mathcal{C}[\![c_1]\!] \circ \mathcal{C}[\![c_0]\!]$, existuje σ'' takové, že $(\sigma, \sigma'') \in \mathcal{C}[\![c_0]\!]$ a $(\sigma'', \sigma') \in \mathcal{C}[\![c_1]\!]$. Podle I.P. platí $\langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma''$ a $\langle c_1, \sigma''\rangle \to \sigma'$, tedy $\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \to \sigma'$.
- $c \equiv \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1$. Jestliže $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![\mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1]\!]$, jsou dvě možnosti:
  - ⋆ $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \mathbf{true}$ a $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c_0]\!]$. Podle 2. a I.P. platí $\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true}$ a $\langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma'$, proto $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \to \sigma'$.
  - ⋆ Druhá možnost se ověří podobně.
- $c \equiv \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c$. Jestliže $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c]\!] = \mu\Gamma$, existuje $k \in \mathbb{N}_0$ takové, že $(\sigma, \sigma') \in \Gamma^k(\emptyset)$. Indukcí ke k dokážeme, že jestliže $(\sigma, \sigma') \in \Gamma^k(\emptyset)$, pak $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \to \sigma'$.

$k = 0$. Jelikož $(\sigma, \sigma') \notin \Gamma^0(\emptyset) = \emptyset$, dokazovaná implikace platí.

Indukční krok: Nechť tedy $(\sigma, \sigma') \in \Gamma^{k+1}(\emptyset)$. Podle definice Γ jsou dvě možnosti:

- $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \textbf{true}$ a $(\sigma, \sigma') \in \Gamma^k(\emptyset) \circ \mathcal{C}[\![c]\!]$. Podle 2. $\langle b, \sigma\rangle \to \textbf{true}$. Navíc existuje σ'' takové, že $(\sigma, \sigma'') \in \mathcal{C}[\![c]\!]$ a $(\sigma'', \sigma') \in \Gamma^k(\emptyset)$. Podle I.P. $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma''$ a $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } c, \sigma''\rangle \to \sigma'$, tedy $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } c, \sigma\rangle \to \sigma'$.
- $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \textbf{false}$ a $\sigma = \sigma'$. Pak $\langle b, \sigma\rangle \to \textbf{false}$ podle 2., proto $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } c, \sigma\rangle \to \sigma$.

□

Axiomatická sémantika IMP

- Uvažme program $P \equiv \textbf{while } X < 0 \textbf{ do } (X := X + 1; Y := Y - 1);\ Z := Z - (X + Y)$
- Jestliže před spuštěním P platí $X + Y = i$ a $Z = j$, pak po dokončení P platí $Z = j - i$.
- Jak to dokázat?
  - pomocí operační nebo denotační sémantiky – problematické.
  - Hoare: do P doplníme „tvrzení“ (pravdivá v „místě“ jejich výskytu) a podáme odvozovací systém, který umožní jejich platnost dokázat.
- Příklad:

$\{X + Y = i \wedge Z = j\}$
while $X < 0$ **do** $(X := X + 1; Y := Y - 1);$
$\{Z - (X + Y) = j - i\}$
$Z := Z - (X + Y)$
$\{Z = j - i\}$

- Cílem je definovat odvozovací systém pro trojice tvaru

  $$\{A\} \quad c \quad \{B\}$$

  kde $c \in \mathbf{Com}$ a A, B jsou „tvrzení“. $\{A\}\ c\ \{B\}$ říká, že pro každý stav $\sigma \in \Sigma$ platí následující: Jestliže $\sigma \models A$, pak pokud c spuštěný ve stavu σ skončí ve stavu σ', platí $\sigma' \models B$.

  - $\star$ $\{A\}\ c\ \{B\}$ je tedy tvrzení o částečné korektnosti programu c; neříká nic o tom, co platí, jestliže c ve stavu σ neskončí.
  - $\star$ Platí tedy např. $\{\mathbf{true}\}\ \mathbf{while\ tt\ do\ skip}\ \{\mathbf{false}\}$

- Pro zjednodušení notace zavedeme speciální „stav“ $\bot$:
  - $\star$ $\Sigma_\bot = \Sigma \cup \{\bot\}$
  - $\star$ Dále zavedeme funkci $\mathcal{C}_\bot : \mathbf{Com} \to (\Sigma_\bot \to \Sigma_\bot)$:
    - $*$ $\mathcal{C}_\bot[\![c]\!]\bot = \bot$ pro každé $c \in \mathbf{Com}$;
    - $*$ $\mathcal{C}_\bot[\![c]\!]\sigma = \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma$ pro každé $c \in \mathbf{Com}$ a $\sigma \in \Sigma$, kde $\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma$ je definováno;
    - $*$ $\mathcal{C}_\bot[\![c]\!]\sigma = \bot$ pro každé $c \in \mathbf{Com}$ a $\sigma \in \Sigma$, kde $\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma$ je nedefinováno.

- Význam $\{A\}\ c\ \{B\}$ pak lze vyjádřit takto:

  $$\{A\}\ c\ \{B\} \iff \forall \sigma \in \Sigma : \quad \sigma \models A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}_\bot[\![c]\!]\sigma \models B$$

Syntaxe a sémantika tvrzení o programech

- Buď $\mathbf{IntVar} = \{i, j, k, \ldots\}$ spočetná množina celočíselných proměnných.
- Rozšířené aritmetické výrazy **Aexpv**

  $$a \quad ::= \quad n \mid X \mid i \mid a_0 + a_1 \mid a_0 - a_1 \mid a_0 * a_1$$

  kde $n \in \mathbf{Num}$, $X \in \mathbf{Var}$ a $i \in \mathbf{IntVar}$.

- Tvrzení o programech („assertions“) **Assn**

  $$A \quad ::= \quad \mathbf{true} \mid \mathbf{false} \mid a_0 = a_1 \mid a_0 \leq a_1 \mid A_0 \wedge A_1 \mid A_0 \vee A_1 \mid \neg A \mid \forall i.A \mid \exists i.A$$

  kde $a_0, a_1 \in \mathbf{Aexpv}$ a $i \in \mathbf{IntVar}$.

- Interpretace je funkce $I : \mathbf{IntVar} \to \mathbb{Z}$. Množinu všech interpretací značíme $\mathcal{I}$.

- Definujeme funkci $\mathcal{E} : \mathbf{Aexpv} \to (\mathcal{I} \to (\Sigma \to \mathbb{Z}))$
  - $\mathcal{E}[\![n]\!]I\sigma = n$
  - $\mathcal{E}[\![X]\!]I\sigma = \sigma(X)$
  - $\mathcal{E}[\![i]\!]I\sigma = I(i)$
  - $\mathcal{E}[\![a_0 + a_1]\!]I\sigma = \mathcal{E}[\![a_0]\!]I\sigma + \mathcal{E}[\![a_1]\!]I\sigma$ (podobně pro „$-$“ a „$*$“)
- A je splněno ve stavu $\sigma \in \Sigma_\perp$ za interpretace $I \in \mathcal{I}$ (psáno $\sigma \models^I A$)
  - $\perp \models^I A$ pro každé $A \in \mathbf{Assn}$; je-li $\sigma \neq \perp$, uplatníme následující pravidla:
  - $\sigma \models^I \mathbf{true}$
  - $\sigma \models^I a_0 = a_1 \iff \mathcal{E}[\![a_0]\!]I\sigma = \mathcal{E}[\![a_1]\!]I\sigma$
  - $\sigma \models^I a_0 \leq a_1 \iff \mathcal{E}[\![a_0]\!]I\sigma \leq \mathcal{E}[\![a_1]\!]I\sigma$
  - $\sigma \models^I A_0 \wedge A_1 \iff \sigma \models^I A_0 \wedge \sigma \models^I A_1$
  - $\sigma \models^I A_0 \vee A_1 \iff \sigma \models^I A_0 \vee \sigma \models^I A_1$
  - $\sigma \models^I \neg A \iff \sigma \not\models^I A$
  - $\sigma \models^I \forall i.A \iff \sigma \models^{I[n/i]} A$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$
  - $\sigma \models^I \exists i.A \iff \sigma \models^{I[n/i]} A$ pro nějaké $n \in \mathbb{Z}$
- $A \in \mathbf{Assn}$ je platné, psáno $\models A$, pokud $\sigma \models^I A$ pro každé $\sigma \in \Sigma$ a $I \in \mathcal{I}$.

Lema 8.

- *Pro každé* $a \in \mathbf{Aexp}$, $\sigma \in \Sigma$ *a* $I \in \mathcal{I}$ *platí* $\mathcal{A}[\![a]\!]\sigma = \mathcal{E}[\![a]\!]I\sigma$.
- *Pro každé* $b \in \mathbf{Bexp}$ *a* $\sigma \in \Sigma$ *platí*
  - $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \mathbf{true} \iff \sigma \models^I b$
  - $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \mathbf{false} \iff \sigma \not\models^I b$

Důkaz. Strukturální indukcí. □

Tvrzení o částečné korektnosti programů

- Tvrzení o částečné korektnosti programu $c \in \mathbf{Com}$ je trojice tvaru

  $$\{A\}\, c\, \{B\}$$

  kde $A, B \in \mathbf{Assn}$.
- $\sigma \models^I \{A\}\, c\, \{B\} \iff (\sigma \models^I A \implies \mathcal{C}_\perp[\![c]\!]\sigma \models^I B)$
- $\models^I \{A\}\, c\, \{B\} \iff \forall \sigma \in \Sigma_\perp : \sigma \models^I \{A\}\, c\, \{B\}$
  - ⋆ Platí $\perp \models^I \{A\}\, c\, \{B\}$ pro každé $I \in \mathcal{I}$, $A, B \in \mathbf{Assn}$, $c \in \mathbf{Com}$.
  - ⋆ Proto $\models^I \{A\}\, c\, \{B\} \iff \forall \sigma \in \Sigma : \sigma \models^I \{A\}\, c\, \{B\}$ (lze využít v důkazech).
- $\models \{A\}\, c\, \{B\} \iff \forall I \in \mathcal{I} : \models^I \{A\}\, c\, \{B\}$
- Tvrzení $\{A\}\, c\, \{B\}$ pro které platí $\models \{A\}\, c\, \{B\}$ nazýváme platné.

Hoareův odvozovací systém pro tvrzení o částečné korektnosti

- Axiom pro **skip**: $\{A\}\ \mathbf{skip}\ \{A\}$
- Axiom pro přiřazení: $\{B[a/X]\}\, X := a\, \{B\}$
- Pravidlo pro sekvenční kompozici:

  $$\frac{\{A\}\, c_0\, \{C\} \qquad \{C\}\, c_1\, \{B\}}{\{A\}\, c_0; c_1\, \{B\}}$$
- Pravidlo pro větvení:

  $$\frac{\{A \wedge b\}\, c_0\, \{B\} \qquad \{A \wedge \neg b\}\, c_1\, \{B\}}{\{A\}\ \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1\ \{B\}}$$
- Pravidlo pro cyklus:

  $$\frac{\{A \wedge b\}\, c\, \{A\}}{\{A\}\ \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c\ \{A \wedge \neg b\}}$$
- Pravidlo důsledku:

  $$\frac{\models (A \Rightarrow A') \qquad \{A'\}\, c\, \{B'\} \qquad \models (B' \Rightarrow B)}{\{A\}\, c\, \{B\}}$$

- Tvrzení $\{A\}\ c\ \{B\}$ je dokazatelné, psáno $\vdash \{A\}\ c\ \{B\}$, je-li odvoditelné v Hoarově odvozovacím systému.
- Tvrzení A pro které platí $\models \{A \wedge b\}\ c\ \{A\}$ se nazývá invariant cyklu **while** b **do** c.

Příklad: $\vdash \{X{=}5\}$ **if** $X = 5$ **then** $Y := X - 2$ **else** $X := Y + 5$ $\{X{=}5\}$

- $$\frac{\models (X{=}5 \wedge X{=}5) \Rightarrow X{=}5 \quad \{X{=}5\}\ \ Y := X-2\ \ \{X{=}5\} \quad \models X{=}5 \Rightarrow X{=}5}{\{X{=}5 \wedge X{=}5\}\ \ Y := X-2\ \ \{X{=}5\}}$$
- $$\frac{\models (X{=}5 \wedge \neg X{=}5) \Rightarrow Y+5=5 \quad \{Y+5=5\}\ \ X := Y+5\ \ \{X=5\} \quad \models X{=}5 \Rightarrow X{=}5}{\{X{=}5 \wedge \neg X{=}5\}\ \ X := Y+5\ \ \{X{=}5\}}$$
- $$\frac{\{X{=}5 \wedge X{=}5\}\ \ Y := X-2\ \ \{X{=}5\} \qquad \{X{=}5 \wedge \neg X{=}5\}\ \ X := Y+5\ \ \{X{=}5\}}{\{X{=}5\}\ \ \textbf{if}\ X=5\ \textbf{then}\ Y := X-2\ \textbf{else}\ X := Y+5\ \ \{X{=}5\}}$$

Příklad: $\vdash \{X{+}Y{=}i \wedge Z{=}j\}$ **while** $X{<}0$ **do** $(X := X{+}1; Y := Y{-}1); Z := Z{-}(X{+}Y)$ $\{Z = j{-}i\}$

- $$\frac{\{Z{-}(X{+}1{+}Y{-}1) = j{-}i\}\ \ X := X{+}1\ \ \{Z{-}(X{+}Y{-}1) = j{-}i\} \qquad \{Z{-}(X{+}Y{-}1) = j{-}i\}\ \ Y := Y{-}1\ \ \{Z{-}(X{+}Y) = j{-}i\}}{\alpha \equiv \quad \{Z{-}(X{+}1{+}Y{-}1) = j{-}i\}\ \ X := X{+}1; Y := Y{-}1\ \ \{Z{-}(X{+}Y) = j{-}i\}}$$
- $$\frac{\models (Z{-}(X{+}Y) = j{-}i \wedge X{<}0) \Rightarrow (Z{-}(X{+}1{+}Y{-}1) = j{-}i) \quad \alpha \quad \models (Z{-}(X{+}Y) = j{-}i) \Rightarrow (Z{-}(X{+}Y) = j{-}i)}{\{Z{-}(X{+}Y) = j{-}i \wedge X{<}0\}\ \ X := X{+}1; Y := Y{-}1\ \ \{Z{-}(X{+}Y) = j{-}i\}}$$
$$\frac{}{\beta \equiv \quad \{Z{-}(X{+}Y) = j{-}i\}\ \ \textbf{while}\ X{<}0\ \textbf{do}\ X := X{+}1; Y := Y{-}1\ \ \{Z{-}(X{+}Y) = j{-}i \wedge \neg X{<}0\}}$$
- $$\frac{\models (X{+}Y{=}i \wedge Z{=}j) \Rightarrow Z{-}(X{+}Y) = j{-}i \quad \beta \quad \models (Z{-}(X{+}Y) = j{-}i \wedge \neg X{<}0) \Rightarrow Z{-}(X{+}Y) = j{-}i}{\gamma \equiv \quad \{X{+}Y = i \wedge Z{=}j\}\ \ \textbf{while}\ X{<}0\ \textbf{do}\ X := X{+}1; Y := Y{-}1\ \ \{Z{-}(X{+}Y) = j{-}i\}}$$
- $$\frac{\gamma \qquad \{Z{-}(X{+}Y) = j{-}i\}\ \ Z := Z{-}(X{+}Y)\ \ \{Z = j{-}i\}}{\{X{+}Y{=}i \wedge Z{=}j\}\ \ \textbf{while}\ X{<}0\ \textbf{do}\ (X := X{+}1; Y := Y{-}1); Z := Z{-}(X{+}Y)\ \ \{Z = j{-}i\}}$$

Korektnost Hoareova odvozovacího systému

Lema 9. *Nechť* $I \in \mathcal{I}$, $X \in \mathbf{Var}$, $a_0, a_1 \in \mathbf{Aexpv}$, $a \in \mathbf{Aexp}$ *a* $B \in \mathbf{Assn}$. *Pak pro každé* $\sigma \in \Sigma$ *platí:*

- $\mathcal{E}[\![a_0[a_1/X]]\!]I\sigma = \mathcal{E}[\![a_0]\!]I\sigma[\mathcal{E}[\![a_1]\!]I\sigma/X]$
- $\sigma \models^I B[a/X] \iff \sigma[\mathcal{A}[\![a]\!]\sigma/X] \models^I B$

Důkaz. Indukcí ke struktuře a_0, resp. B. □

Věta 10 (o korektnosti)**.** *Jestliže* $\vdash \{A\}\, c\, \{B\}$, *pak* $\models \{A\}\, c\, \{B\}$.

Důkaz. Indukcí k výšce odvozovacího stromu pro $\{A\}\, c\, \{B\}$.

Uvážíme, jaké pravidlo bylo použito pro odvození kořene:

- Axiom pro **skip**. Pak je kořen tvaru $\{A\}$ **skip** $\{A\}$. Toto tvrzení je zjevně platné.
- Axiom pro $X := a$. Pak je kořen tvaru $\{B[a/X]\}\, X := a\, \{B\}$. Nechť $I \in \mathcal{I}$ a $\sigma \in \Sigma$. Podle lematu 9 platí $\sigma \models^I B[a/X] \iff \sigma[\mathcal{A}[\![a]\!]\sigma/X] \models^I B$. Jelikož $\sigma[\mathcal{A}[\![a]\!]\sigma/X] = \mathcal{C}[\![X := a]\!]\sigma$, dostáváme

  $$\sigma \models^I B[a/X] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}[\![X := a]\!]\sigma \models^I B,$$

  tedy $\models \{B[a/X]\}\, X := a\, \{B\}$.

- Pravidlo pro sekvenční kompozici. Pak je kořen tvaru $\{A\}\, c_0; c_1\, \{B\}$ a má následníky $\{A\}\, c_0\, \{C\}$ a $\{C\}\, c_1\, \{B\}$, což jsou podle I.P. platná tvrzení. Nechť $I \in \mathcal{I}$ a $\sigma \in \Sigma$. Předpokládejme, že $\sigma \models^I A$. Platí $\mathcal{C}_\perp[\![c_0]\!]\sigma \models^I C$ (neboť $\models \{A\}\, c_0\, \{C\}$) a $\mathcal{C}_\perp[\![c_1]\!](\mathcal{C}_\perp[\![c_0]\!]\sigma) \models^I B$, protože $\models \{C\}\, c_1\, \{B\}$ a $\mathcal{C}_\perp[\![c_0]\!]\sigma \models^I C$. Tedy $\models \{A\}\, c_0; c_1\, \{B\}$.
- Pravidlo pro větvení. Pak kořen $\{A\}$ **if** b **then** c_0 **else** c_1 $\{B\}$ má následníky $\{A \wedge b\}\, c_0\, \{B\}$ a $\{A \wedge \neg b\}\, c_1\, \{B\}$, což jsou podle I.P. platná tvrzení. Nechť $I \in \mathcal{I}$ a $\sigma \in \Sigma$. Předpokládejme, že $\sigma \models^I A$. Dále buď $\sigma \models^I b$, nebo $\sigma \models^I \neg b$. V prvém případě $\sigma \models^I A \wedge b$, tedy $\mathcal{C}_\perp[\![c_0]\!]\sigma \models^I B$, neboť $\models \{A \wedge b\}\, c_0\, \{B\}$. V druhém případě $\sigma \models^I A \wedge \neg b$, tedy $\mathcal{C}_\perp[\![c_1]\!]\sigma \models^I B$. Celkem $\models \{A\}$ **if** b **then** c_0 **else** c_1 $\{B\}$ (užitím lematu 8).
- Pravidlo pro cyklus. Pak kořen $\{A\}$ **while** b **do** c $\{A \wedge \neg b\}$ má následníka $\{A \wedge b\}\, c\, \{A\}$, který je podle I.P. platným tvrzením. Nechť $I \in \mathcal{I}$ a $\sigma \in \Sigma$. Potřebujeme ukázat, že

  $$\sigma \models^I A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}_\perp[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!]\sigma \models^I A \wedge \neg b$$

  Mějme tedy σ a I takové, že $\sigma \models^I A$. Označme $\sigma' = \mathcal{C}_\perp[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!]\sigma$. Pokud $\sigma' = \perp$, jsme hotovi. Jinak $\sigma' = \mathcal{C}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!]\sigma$ (podle definice $\mathcal{C}_\perp$), proto $(\sigma, \sigma') \in \Gamma^j(\emptyset)$ pro nějaké $j \in \mathbb{N}_0$ (jelikož $\mathcal{C}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!] = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma^i(\emptyset)$). K tomu, že $\sigma' \models^I A \wedge \neg b$, stačí ukázat, že pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ platí

  $$D(j) \quad \equiv \quad \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma, \forall I \in \mathcal{I}: \quad ((\sigma, \sigma') \in \Gamma^j(\emptyset) \wedge \sigma \models^I A) \quad \Rightarrow \quad \sigma' \models^I A \wedge \neg b$$

  Indukcí vzhledem k j.

  $\star$ $j = 0$. Jelikož $\Gamma^0(\emptyset) = \emptyset$, neplatí antecedent dokazované implikace.

⋆ Indukční krok: Předpokládejme, že $D(j)$ platí. Dokážeme, že platí $D(j+1)$. Nechť tedy $(\sigma, \sigma') \in \Gamma^{j+1}(\emptyset)$ a $\sigma \models^I A$. Podle definice Γ jsou dvě možnosti:

∗ $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \mathbf{true}$ a $(\sigma, \sigma') \in \Gamma^j(\emptyset) \circ \mathcal{C}[\![c]\!]$. Pak $\sigma \models^I b$ (užitím lematu 8), tedy $\sigma \models^I A \wedge b$. Dále existuje σ'' takové, že $(\sigma, \sigma'') \in \mathcal{C}[\![c]\!]$ a $(\sigma'', \sigma') \in \Gamma^j(\emptyset)$. Jelikož $\models \{A \wedge b\}\ c\ \{A\}$, platí $\sigma'' \models^I A$. Nyní podle $D(j)$ dostáváme $\sigma' \models^I A \wedge \neg b$, tedy $D(j+1)$ platí.

∗ $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \mathbf{false}$ a $\sigma' = \sigma$. Platí $\sigma \models^I \neg b$ a tedy $\sigma \models^I A \wedge \neg b$, což bylo dokázat.

- Pravidlo důsledku. Pak kořen $\{A\}\ c\ \{B\}$ má následníky $\models (A \Rightarrow A')$, $\{A'\}\ c\ \{B'\}$ a $\models (B' \Rightarrow B)$. Podle I.P. je $\{A'\}\ c\ \{B'\}$ platné tvrzení. Nechť $I \in \mathcal{I}$ a $\sigma \in \Sigma$. Jestliže $\sigma \models^I A$, platí také $\sigma \models^I A'$, proto $\mathcal{C}_\perp[\![c]\!]\sigma \models^I B'$ a tudíž i $\mathcal{C}_\perp[\![c]\!]\sigma \models^I B$.

□

Nejslabší vstupní podmínka

- Chceme-li odvodit tvrzení $\{A\}\ c_0; c_1\ \{B\}$, lze to podle pravidla pro sekvenční kompozici provést tak, že pro vhodně zvolené $C \in \mathbf{Assn}$ odvodíme tvrzení $\{A\}\ c_0\ \{C\}$ a $\{C\}\ c_1\ \{B\}$.
- Dokážeme, že takové C existuje pro libovolné A, B, c_0, c_1; tímto C bude tzv. nejslabší vstupní podmínka pro c_1 a B (vyjádřená v **Assn**).
- Nechť $c \in \mathbf{Com}$, $B \in \mathbf{Assn}$ a $I \in \mathcal{I}$. Nejslabší vstupní podmínka pro B vzhledem k c a I, označovaná $wp^I[\![c, B]\!]$, je definovaná takto:

$$wp^I[\![c, B]\!] \quad = \quad \{\sigma \in \Sigma_\perp \mid \mathcal{C}_\perp[\![c]\!]\sigma \models^I B\}.$$

- Zavedeme značení $A^I = \{\sigma \in \Sigma_\perp \mid \sigma \models^I A\}$.
- Dané $A \in \mathbf{Assn}$ vyjadřuje nejslabší vstupní podmínku pro B a c, pokud pro každé $I \in \mathcal{I}$ platí $A^I = wp^I[\![c, B]\!]$.
- Platí $\models^I \{A\}\ c\ \{B\} \iff A^I \subseteq wp^I[\![c, B]\!]$.
- Předpokládejme, že $A_0 \in \mathbf{Assn}$ vyjadřuje nejslabší vstupní podmínku pro B a c. Pak výše uvedenou ekvivalenci lze přepsat na $\models^I \{A\}\ c\ \{B\} \iff A^I \subseteq A_0^I \iff \models^I (A \Rightarrow A_0)$, což platí pro libovolné I, tedy $\models \{A\}\ c\ \{B\} \iff \models (A \Rightarrow A_0)$ (odtud přívlastek „nejslabší“).

Nejslabší vstupní podmínka – příklady

- $wp^{\mathrm{I}}[\![\textbf{skip},\ \textbf{false}]\!] \quad = \quad \{\bot\}$. Vyjádřitelné jako **false**.
- Obecně $wp^{\mathrm{I}}[\![\textbf{skip},\ B]\!] \quad = \quad B^{\mathrm{I}}$.
- $wp^{\mathrm{I}}[\![\textbf{while true do skip},\ \textbf{true}]\!] \quad = \quad \Sigma_{\bot}$. Vyjádřitelné jako **true**.
- $wp^{\mathrm{I}}[\![\textbf{while true do skip},\ \textbf{false}]\!] \quad = \quad \Sigma_{\bot}$. Vyjádřitelné jako **true**.
- $wp^{\mathrm{I}}[\![X := 2; Y := 4,\ X = 3]\!] \quad = \quad \{\bot\}$.
- $wp^{\mathrm{I}}[\![X := X + 1; Y := Y - 1,\ X = 3 \wedge Y = 6]\!] \quad = \quad \{\bot\} \cup \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma(X) = 2 \wedge \sigma(Y) = 7\}$. Vyjádřitelné jako $X = 2 \wedge Y = 7$.
- $wp^{\mathrm{I}}[\![X := Y,\ i = X]\!] \quad = \quad \{\bot\} \cup \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma(Y) = I(i)\}$. Vyjádřitelné jako $Y = i$.

Gödelův predikát β

- Definujeme 4-ární predikát β na nezáporných celých číslech předpisem

$$\beta(a, b, i, x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = a \bmod (1 + b(1 + i))$$

- Buď $\mathcal{S}$ nekonečná posloupnost nezáporných celých čísel, $a, b \in \mathbb{N}_0$. Řekneme, že $\mathcal{S}$ splňuje β (pro dané a a b), jestliže pro každé $i \in \mathbb{N}_0$ platí $\beta(a, b, i, \mathcal{S}(i))$.
- Pro každé $a, b \in \mathbb{N}_0$ existuje jediná posloupnost splňující β; tou je posloupnost $\mathcal{S}_{a,b}$ daná předpisem $\mathcal{S}_{a,b}(i) = a \bmod (1 + b(1 + i))$.
- Predikát β je vyjádřitelný v **Assn**, neboť $x = a \bmod b$ lze napsat jako

$$a \geq 0 \quad \wedge \quad b \geq 0 \quad \wedge$$
$$\exists k: \quad (k \geq 0 \quad \wedge \quad k * b \leq a \quad \wedge \quad (k + 1) * b > a \quad \wedge \quad x = a - (k * b))$$

Věta 11. *Pro každou konečnou posloupnost $n_0, \cdots, n_k$ nezáporných celých čísel existují $n, m \in \mathbb{N}_0$ taková, že $n_j = \mathcal{S}_{n,m}(j)$ pro každé $0 \leq j \leq k$. To znamená, že pro každé $0 \leq j \leq k$ platí*

$$\beta(n, m, j, x) \iff x = n_j.$$

Důkaz. (osnova)

- Nechť

$$m = (\max\{k, n_0, \cdots, n_k\})!$$

Čísla

$$p_i = 1 + m(1 + i), \quad 0 \leq i \leq k$$

jsou navzájem nesoudělná a $n_i < p_i$ pro každé $0 \leq i \leq k$.

- Dále pro každé $0 \leq i \leq k$ definujeme

$$c_i = p_0 \cdot \ldots \cdot p_k / p_i.$$

Nyní pro každé $0 \leq i \leq k$ existuje přesně jedno d_i, $0 \leq d_i \leq p_i$, takové, že $(c_i \cdot d_i) \bmod p_i = 1$

- Definujeme

$$n = \sum_{i=0}^{k} c_i \cdot d_i \cdot n_i.$$

Pro každé $0 \leq i \leq k$ platí $n_i = n \bmod p_i$, což je tvrzení věty.

□

Rozšířený predikát $\beta^{\pm}$

- Cílem je vytvořit prostředek pro kódování konečných posloupností hodnot proměnných jazyka **IMP**, tj. konečných posloupností celých čísel.
- Celá čísla lze seřadit do posloupnosti $0, 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots$. Každé celé číslo je pak „kódováno“ pozicí v této posloupnosti, což je nezáporné celé číslo (0 má dokonce dva kódy, 0 a 1).
- Definujeme binární predikát $F(x, y)$ („x je kódem y“) na celých číslech předpisem

$$F(x, y) \iff x \geq 0 \wedge \forall z : (x = 2 * z \Rightarrow y = z) \wedge (x = 2 * z + 1 \Rightarrow y = -z)$$

- Nyní lze definovat 4-ární predikát $\beta^{\pm}$ na celých číslech (vyjádřitelný v **Assn**) předpisem

$$\beta^{\pm}(n, m, j, y) \iff \exists x : \beta(n, m, j, x) \wedge F(x, y)$$

- Analogicky jako pro β definujeme posloupnost splňující $\beta^{\pm}$ a posloupnost $\mathcal{S}^{\pm}_{n,m}$, která je jedinou posloupností splňující $\beta^{\pm}$ (pro dané $n, m \in \mathbb{N}_0$).

Věta 12. *Pro každou konečnou posloupnost $n_0, \cdots, n_k$ celých čísel existují $n, m \in \mathbb{N}_0$ taková, že $n_j = \mathcal{S}^{\pm}_{n,m}(j)$ pro každé $0 \leq j \leq k$. To znamená, že pro každé $0 \leq j \leq k$ platí*

$$\beta^{\pm}(n, m, j, x) \iff x = n_j.$$

Příklad užití predikátu $\beta^{\pm}$

- Lze v **Assn** vyjádřit $X \geq 0 \quad \wedge \quad Y = X!$?
- „Zakódujeme“ posloupnost $1, 1, 2, 6, 24, \cdots, X!$

  ⋆ $Y = X!$

  ⋆ $\exists \mathcal{S} . \quad \mathcal{S}(0) = 1 \wedge \forall l . \ 1 \leq l \leq X \Rightarrow (\mathcal{S}(l) = \mathcal{S}(l-1) * l) \wedge Y = \mathcal{S}(X)$

  ⋆ $\exists \mathcal{S} . \quad \mathcal{S}(0) = 1 \wedge \forall l . \ 1 \leq l \leq X \Rightarrow (\forall u. \forall v. u = \mathcal{S}(l) \wedge v = \mathcal{S}(l-1) \Rightarrow u = v * l) \wedge Y = \mathcal{S}(X)$

  ⋆ $\exists n . \exists m . \beta^{\pm}(n, m, 0, 1) \wedge \forall l . \ 1 \leq l \leq X \Rightarrow (\forall u. \forall v. \beta^{\pm}(n, m, l, u) \wedge \beta^{\pm}(n, m, l-1, v) \Rightarrow u = v * l) \wedge \beta^{\pm}(n, m, X, Y)$

Vyjádřitelnost nejslabší vstupní podmínky v Assn

Věta 13. *Pro každé* $c \in$ **Com** *a* $B \in$ **Assn** *existuje* $A[\![c, B]\!] \in$ **Assn** *takové, že pro každé* $I \in \mathcal{I}$ *platí* $A[\![c, B]\!]^I = wp^I[\![c, B]\!]$.

Důkaz. Je dobré si znovu uvědomit, že

$$A[\![c, B]\!]^I = wp^I[\![c, B]\!] \iff \forall \sigma \in \Sigma : (\sigma \models^I A[\![c, B]\!] \iff \mathcal{C}_\perp[\![c]\!]\sigma \models^I B).$$

Důkaz je veden indukcí ke struktuře c.

- $c \equiv$ **skip**. Stačí položit $A[\![\textbf{skip}, B]\!] = B$. Pro každé $I \in \mathcal{I}$ a $\sigma \in \Sigma$ platí

  $\sigma \in wp^I[\![\textbf{skip}, B]\!]$
  $\iff \mathcal{C}_\perp[\![\textbf{skip}]\!]\sigma \models^I B$
  $\iff \sigma \models^I B$
  $\iff \sigma \models^I A[\![\textbf{skip}, B]\!]$.

- $c \equiv X := a$. Definujeme $A[\![X := a, B]\!] = B[a/X]$. Pak pro každé $I \in \mathcal{I}$ a $\sigma \in \Sigma$ platí

  $\sigma \in wp^I[\![X := a, B]\!]$
  $\iff \sigma[\mathcal{A}[\![a]\!]\sigma/X] \models^I B$

$\iff$ $\sigma \models^I B[a/X]$ (užitím lematu 9)

$\iff$ $\sigma \models^I A[\![X := a, B]\!]$.

- $c \equiv c_0; c_1$. Definujeme $A[\![c_0; c_1, B]\!] = A[\![c_0, A[\![c_1, B]\!]]\!]$. Pro každé $I \in \mathcal{I}$ a $\sigma \in \Sigma$ platí

  $\sigma \in wp^I[\![c_0; c_1, B]\!]$

  $\iff$ $\mathcal{C}_\perp[\![c_0; c_1]\!]\sigma \models^I B$

  $\iff$ $\mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma \models^I A[\![c_1, B]\!]$ (podle I.P.)

  $\iff$ $\sigma \models^I A[\![c_0, A[\![c_1, B]\!]]\!]$ (podle I.P.)

  $\iff$ $\sigma \models^I A[\![c_0; c_1, B]\!]$.

- $c \equiv$ **if** b **then** c_0 **else** c_1. Definujeme $A[\![$**if** b **then** c_0 **else** $c_1, B]\!] = (b \wedge A[\![c_0, B]\!]) \vee (\neg b \wedge A[\![c_1, B]\!])$. Pak pro každé $I \in \mathcal{I}$ a $\sigma \in \Sigma$ platí

  $\sigma \in wp^I[\![c, B]\!]$

  $\iff$ $\mathcal{C}_\perp[\![c]\!]\sigma \models^I B$

  $\iff$ $(\mathcal{B}[\![b]\!] = \mathbf{true} \wedge \mathcal{C}_\perp[\![c_0]\!]\sigma \models^I B) \vee (\mathcal{B}[\![b]\!] = \mathbf{false} \wedge \mathcal{C}_\perp[\![c_1]\!]\sigma \models^I B)$

  $\iff$ $(\sigma \models^I b \wedge \sigma \models^I A[\![c_0, B]\!]) \vee (\sigma \models^I \neg b \wedge \sigma \models^I A[\![c_1, B]\!])$ podle I.P.

  $\iff$ $\sigma \models^I (b \wedge A[\![c_0, B]\!]) \vee (\neg b \wedge A[\![c_1, B]\!])$ $\iff$ $\sigma \models^I A[\![c, B]\!]$.

- $c \equiv$ **while** b **do** c_0. Platí $\sigma \in wp^I[\![$**while** b **do** $c_0, B]\!]$ $\iff$

$$\forall k\, \forall \sigma_0, \cdots . \sigma_k \in \Sigma \ :$$
$$(\sigma = \sigma_0 \quad \wedge \quad \forall i (0 \leq i < k) \ : (\sigma_i \models^I b \ \wedge \ \mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma_i = \sigma_{i+1})) \quad \Rightarrow \quad (\sigma_k \models^I b \vee B) \tag{1}$$

Stačí tedy výše uvedené tvrzení „přeložit“ do **Assn**. K tomu využijeme následující pozorování: Buď $A \in$ **Assn** takové, že všechny proměnné vyskytující se v A jsou mezi $X_1, \cdots, X_l$ (místo $X_1, \cdots, X_l$ budeme psát také $\vec{X}$). Pro každé $\sigma \in \Sigma$ lze nyní definovat l-tici $\vec{s}$, kde $\vec{s}(i) = \sigma(X_i)$. Pro každé $I \in I$ platí

$$\sigma \models^I A \quad \iff \quad \models^I A[\vec{s}/\vec{X}] \tag{*}$$

což lze snadno ukázat strukturální indukcí. Nechť $X_1, \cdots, X_l$ jsou všechny proměnné, které se vyskytují v c a B. Nyní lze (1) přepsat na

$$\forall k\, \forall \vec{s}_0, \cdots . \vec{s}_k \in \mathbb{Z} \ :$$
$$(\sigma \models^I \vec{X} = \vec{s}_0 \quad \wedge$$
$$\forall i (0 \leq i < k) \ : (\models^I b[\vec{s}_i/\vec{X}] \wedge \ \models^I (A[\![c_0, \vec{X} = \vec{s}_{i+1}]\!] \ \wedge \ \neg A[\![c_0, \mathbf{false}]\!])[\vec{s}_i/\vec{X}]))$$
$$\Rightarrow \quad \models^I (b \vee B)[\vec{s}_k/\vec{X}] \tag{2}$$

Ukážeme, že (1) a (2) jsou ekvivalentní. K tomu je (zejména) třeba dokázat, že pokud σ_i resp. σ_{i+1} mají na $\vec{X}$ hodnoty $\vec{s}_i$ resp. $\vec{s}_{i+1}$ a jinde jsou stejné, platí

$$\mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma_i = \sigma_{i+1} \quad \iff \quad \models^I (A[\![c_0, \vec{X} = \vec{s}_{i+1}]\!] \ \wedge \ \neg A[\![c_0, \mathbf{false}]\!])[\vec{s}_i/\vec{X}]$$

pro každé $I \in \mathcal{I}$. Snadno se vidí, že

$$\mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma_i = \sigma_{i+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma_i \in wp^I[\![c_0, \vec{X} = \vec{s}_{i+1}]\!] \quad \wedge \quad \mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma_i \text{ je definováno.}$$

Podle I.P. $\sigma_i \in wp^I[\![c_0, \vec{X} = \vec{s}_{i+1}]\!] \Longleftrightarrow \sigma_i \models^I A[\![c_0, \vec{X} = \vec{s}_{i+1}]\!]$. Dále $\mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma_i$ je definováno právě když $\sigma_i \models^I \neg A[\![c_0, \mathbf{false}]\!]$). Nyní již stačí aplikovat (*) a dostaneme tvar použitý v (2). Formuli (2) lze nyní transformovat na výraz jazyka **Assn** pomocí predikátu $\beta^{\pm}$. Nejprve „zakódujeme“ jednotlivá $\vec{s}_i$ jako dvojice nezáporných celých čísel:

$$\begin{aligned}
&\forall k, n_0, m_0, \cdots, n_k, m_k \geq 0 \ : \\
&\quad (\textstyle\bigwedge_{j=0}^{l} \beta^{\pm}(n_0, m_0, j, X_j) \quad \wedge \\
&\quad \forall i(0 \leq i < k) \ : ((\forall x_0, \cdots, x_l \ : \ \textstyle\bigwedge_{j=0}^{l} \beta^{\pm}(n_i, m_i, j, x_j) \ \Rightarrow \ b[\vec{x}/\vec{X}]) \quad \wedge \\
&\qquad (\forall x_0, \cdots, x_l, y_0, \cdots, y_l \ : \ (\textstyle\bigwedge_{j=0}^{l} \beta^{\pm}(n_i, m_i, j, x_j) \wedge \beta^{\pm}(n_{i+1}, m_{i+1}, j, y_j)) \\
&\qquad\quad \Rightarrow \ (A[\![c_0, \vec{X} = \vec{y}]\!] \ \wedge \ \neg A[\![c_0, \mathbf{false}]\!])[\vec{x}/\vec{X}])))) \\
&\quad \Rightarrow \quad (\forall x_0. \cdots, x_l \ : \ \textstyle\bigwedge_{j=0}^{l} \beta^{\pm}(n_k, m_k, j, x_j) \ \Rightarrow \ (b \vee B)[\vec{x}/\vec{X}])
\end{aligned} \tag{3}$$

Zbývá zakódovat posloupnost $n_0, m_0, \cdots, n_k, m_k$ do jediné dvojice čísel. Získané tvrzení bude kvantifikováno takto:

$$\forall k, n, m \geq 0 \ :$$

Dále provedeme tato nahrazení:

⋆ $\bigwedge_{j=0}^{l} \beta^{\pm}(n_0, m_0, j, X_j)$ nahradíme výrazem

---

$$\forall p, q \ : \ (\beta^{\pm}(n, m, 0, p) \wedge \beta^{\pm}(n, m, 1, q)) \quad \Rightarrow \quad \textstyle\bigwedge_{j=0}^{l} \beta^{\pm}(p, q, j, X_j)$$

⋆ $\forall x_0, \cdots, x_l \ : \ \bigwedge_{j=0}^{l} \beta^{\pm}(n_i, m_i, j, x_j) \ \Rightarrow \ b[\vec{x}/\vec{X}])$ nahradíme výrazem

$$\begin{aligned}
\forall p, q \ : \ & (\beta^{\pm}(n, m, 2 * i, p) \ \wedge \ \beta^{\pm}(n, m, 2 * i + 1, q)) \quad \Rightarrow \\
& (\forall x_0, \cdots, x_l \ : \ \textstyle\bigwedge_{j=0}^{l} \beta^{\pm}(p, q, j, x_j) \ \Rightarrow \ b[\vec{x}/\vec{X}]))
\end{aligned}$$

⋆ $(\forall x_0, \cdots, x_l, y_0, \cdots, y_l \ : \ (\bigwedge_{j=0}^{l} \beta^{\pm}(n_i, m_i, j, x_j) \ \wedge \ \beta^{\pm}(n_{i+1}, m_{i+1}, j, y_j))$ nahradíme výrazem

$$\begin{aligned}
\forall p, q, u, v \ : \quad & (\beta^{\pm}(n, m, 2 * i, p) \ \wedge \ \beta^{\pm}(n, m, 2 * i + 1, q) \wedge \\
& \qquad \beta^{\pm}(n, m, 2 * i + 2, u) \ \wedge \ \beta^{\pm}(n, m, 2 * i + 3, v)) \quad \Rightarrow \\
& (\forall x_0, \cdots, x_l, y_0, \cdots, y_l \ : \ (\textstyle\bigwedge_{j=0}^{l} \beta^{\pm}(p, q, j, x_j) \wedge \beta^{\pm}(u, v, j, y_j)))
\end{aligned}$$

⋆ $\forall x_0. \cdots, x_l \ : \ \bigwedge_{j=0}^{l} \beta^{\pm}(n_k, m_k, j, x_j) \ \Rightarrow \ (b \vee B)[\vec{x}/\vec{X}]$ nahradíme výrazem

$$\begin{aligned}
\forall p, q \ : \ & (\beta^{\pm}(n, m, 2 * k, p) \ \wedge \ \beta^{\pm}(n, m, 2 * k + 1, q) \quad \Rightarrow \\
& (\forall x_0, \cdots, x_l \ : \ \textstyle\bigwedge_{j=0}^{l} \beta^{\pm}(p, q, j, x_j) \ \Rightarrow \ (b \vee B)[\vec{x}/\vec{X}].
\end{aligned}$$

Získaná formule již patří do **Assn**. □

Úplnost Hoareova odvozovacího systému

Lema 14. *Nechť* $c \in \mathbf{Com}$ *a* $B \in \mathbf{Assn}$*. Dále nechť* $A[\![c, B]\!] \in \mathbf{Assn}$ *vyjadřuje nejslabší vstupní podmínku pro* c *a* B*. Pak* $\vdash \{A[\![c, B]\!]\}\, c\, \{B\}$.

Důkaz. Indukcí ke struktuře c (využijeme poznatků z důkazu věty 13).

- $c \equiv \mathbf{skip}$. $A[\![\mathbf{skip}, B]\!]$ je ekvivalentní B, zejména tedy $\models A[\![\mathbf{skip}, B]\!] \Rightarrow B$. Proto $\vdash \{A[\![\mathbf{skip}, B]\!]\}\, \mathbf{skip}\, \{B\}$ (užitím axiomu pro **skip** a pravidla důsledku).
- $c \equiv X := a$. Pak $A[\![X := a, B]\!]$ je ekvivalentní $B[a/X]$. Užitím axiomu pro přiřazení a pravidla důsledku dostáváme $\vdash \{A[\![X := a, B]\!]\}\, X := a\, \{B\}$.
- $c \equiv c_0; c_1$. Pak $A[\![c_0; c_1, B]\!]$ je ekvivalentní $A[\![c_0, A[\![c_1, B]\!]]\!]$, kde $A[\![c_1, B]\!]$ vyjadřuje nejslabší vstupní podmínku pro c_1 a B, a $A[\![c_0, A[\![c_1, B]\!]]\!]$ vyjadřuje nejslabší vstupní podmínku pro c_0 a $A[\![c_1, B]\!]$. Podle I.P. $\vdash \{A[\![c_1, B]\!]\}\, c_1\, \{B\}$ a $\vdash \{A[\![c_0, A[\![c_1, B]\!]]\!]\}\, c_0\, \{A[\![c_1, B]\!]\}$. Podle pravidla pro sekvenční kompozici $\vdash \{A[\![c_0, A[\![c_1, B]\!]]\!]\}\, c_0; c_1\, \{B\}$, proto také $\vdash \{A[\![c_0; c_1, B]\!]\}\, c_0; c_1\, \{B\}$ užitím pravidla důsledku.
- $c \equiv \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1$. Pak $A[\![c, B]\!]$ je ekvivalentní $(b \wedge A[\![c_0, B]\!]) \vee (\neg b \wedge A[\![c_1, B]\!])$, kde $A[\![c_0, B]\!]$ resp. $A[\![c_1, B]\!]$ vyjadřuje nejslabší vstupní podmínku pro c_0 resp. c_1 a B. Podle I.P. $\vdash \{A[\![c_0, B]\!]\}\, c_0\, \{B\}$ a $\vdash \{A[\![c_1, B]\!]\}\, c_1\, \{B\}$. Jelikož $\models (A[\![c, B]\!] \wedge b) \Rightarrow A[\![c_0, B]\!]$, užitím pravidla důsledku dostáváme $\vdash \{A[\![c, B]\!] \wedge b\}\, c_0\, \{B\}$. Podobně $\vdash \{A[\![c, B]\!] \wedge \neg b\}\, c_1\, \{B\}$, můžeme tedy použít pravidlo pro větvení čímž obdržíme $\vdash \{A[\![c, B]\!]\}\, c\, \{B\}$.

- $c \equiv \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c_0$. Dokážeme, že

  a) $\models \{A[\![c, B]\!] \wedge b\}\, c_0\, \{A[\![c, B]\!]\}$,

  b) $\models (A[\![c, B]\!] \wedge \neg b) \Rightarrow B$.

  Vyjadřuje-li $A[\![c_0, A[\![c, B]\!]]\!]$ nejslabší vstupní podmínku pro c_0 a $A[\![c, B]\!]$, pak podle I.P. $\vdash \{A[\![c_0, A[\![c, B]\!]]\!]\}\, c_0\, \{A[\![c, B]\!]\}$. Podle a) pak platí $\models (A[\![c, B]\!] \wedge b) \Rightarrow A[\![c_0, A[\![c, B]\!]]\!]$, proto $\vdash \{A[\![c, B]\!] \wedge b\}\, c_0\, \{A[\![c, B]\!]\}$ užitím pravidla důsledku. Dále podle pravidla pro **while** dostáváme $\vdash \{A[\![c, B]\!]\}\, c\, \{A[\![c, B]\!] \wedge \neg b\}$ a pomocí b) a pravidla důsledku konečně $\vdash \{A[\![c, B]\!]\}\, c\, \{B\}$.

  ad a) Nechť $\sigma \in \Sigma$ a $I \in \mathcal{I}$. Jestliže $\sigma \models^I A[\![c, B]\!] \wedge b$, platí $\sigma \models^I A[\![c, B]\!]$ a $\sigma \models^I b$, tj. $\mathcal{C}_\perp[\![c]\!]\sigma \models^I B$ a $\sigma \models^I b$. Denotační sémantika byla definována tak, že platí:

  $$\mathcal{C}_\perp[\![c]\!] \quad = \quad \mathcal{C}_\perp[\![\mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0; c\ \mathbf{else\ skip}]\!]$$

  To znamená, že $\mathcal{C}_\perp[\![c_0; c]\!]\sigma \models^I B$, tedy $\mathcal{C}_\perp[\![c]\!](\mathcal{C}_\perp[\![c_0]\!]\sigma) \models^I B$. Proto $\mathcal{C}_\perp[\![c_0]\!]\sigma \models^I A[\![c, B]\!]$, tedy $\models \{A[\![c, B]\!] \wedge b\}\, c_0\, \{A[\![c, B]\!]\}$.

  ad b) Nechť $\sigma \in \Sigma$ a $I \in \mathcal{I}$. Jestliže $\sigma \models^I A[\![c, B]\!] \wedge \neg b$, pak $\sigma \models^I A[\![c, B]\!]$ a $\sigma \models^I \neg b$. Jelikož

  $$\mathcal{C}_\perp[\![c]\!] \quad = \quad \mathcal{C}_\perp[\![\mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0; c\ \mathbf{else\ skip}]\!],$$

  dostáváme $\mathcal{C}_\perp[\![c]\!]\sigma = \sigma$, proto $\sigma \models^I B$. Tedy $\models (A[\![c, B]\!] \wedge \neg b) \Rightarrow B$.

□

Věta 15 (o úplnosti)**.** *Jestliže* $\models \{A\}\, c\, \{B\}$*, pak* $\vdash \{A\}\, c\, \{B\}$*.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\models \{A\}\, c\, \{B\}$. Podle věty 13 existuje $A[\![c, B]\!] \in \mathbf{Assn}$, které vyjadřuje nejslabší vstupní podmínku pro c a B. Platí tedy $\models (A \Rightarrow A[\![c, B]\!])$. Podle lematu 14 platí $\vdash \{A[\![c, B]\!]\}\, c\, \{B\}$ a tedy $\vdash \{A\}\, c\, \{B\}$ užitím pravidla důsledku. □

Ekvivalence axiomatické a denotační sémantiky

- Axiomatická sémantika přirozeným způsobem definuje sémantickou ekvivalenci $\simeq$ na příkazech:

$$c_0 \simeq c_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A, B \in \mathrm{Assn} : \quad (\models \{A\}\, c_0\, \{B\} \iff \models \{A\}\, c_1\, \{B\})$$

Věta 16. *Pro každé* $c_0, c_1 \in \mathbf{Com}$ *platí:* $\mathcal{C}[\![c_0]\!] = \mathcal{C}[\![c_1]\!] \quad \Longleftrightarrow \quad c_0 \simeq c_1$

Důkaz.

„⇒“ Buďte $\sigma \in \Sigma$ a $I \in \mathcal{I}$ takové, že $\sigma \models^I A$. Jelikož $\mathcal{C}_\perp[\![c_0]\!]\sigma = \mathcal{C}_\perp[\![c_1]\!]\sigma$, platí

$\mathcal{C}_\perp[\![c_0]\!]\sigma \models^I B \iff \mathcal{C}_\perp[\![c_1]\!]\sigma \models^I B$

„⇐“ Ukážeme, že pokud $\mathcal{C}[\![c_0]\!] \neq \mathcal{C}[\![c_1]\!]$, pak existuje $\sigma \in \Sigma$ a $A, B \in \mathbf{Assn}$ takové, že

$\models \{A\}\, c_0\, \{B\} \not\Longleftrightarrow \models \{A\}\, c_1\, \{B\}$

Jestliže $\mathcal{C}[\![c_0]\!] \neq \mathcal{C}[\![c_1]\!]$, existuje $\sigma \in \Sigma$ takové, že $\mathcal{C}_\perp[\![c_0]\!]\sigma \neq \mathcal{C}_\perp[\![c_1]\!]\sigma$. Nechť $\mathcal{X}$ je množina všech proměnných, které se vyskytují v c_0 a c_1. Definujeme

$$A \quad \equiv \quad \bigwedge_{Y \in \mathcal{X}} Y = n_Y$$

kde n_Y je hodnota proměnné Y ve stavu σ. Dále označme $\sigma_0 = \mathcal{C}_\perp[\![c_0]\!]\sigma$ a $\sigma_1 = \mathcal{C}_\perp[\![c_1]\!]\sigma$. Rozlišíme tři možnosti:

- $\sigma_0 \neq \bot \neq \sigma_1$. Jelikož $\sigma_0 \neq \sigma_1$, existuje $X \in \mathcal{X}$ takové, že $\sigma_0(X) \neq \sigma_1(X)$. Definujeme $B \equiv X{=}m$, kde m je hodnota proměnné X ve stavu σ_0. Pak $\models \{A\}\, c_0\, \{B\}$, zatímco $\not\models \{A\}\, c_1\, \{B\}$ (neboť $\sigma \not\models^I \{A\}\, c_1\, \{B\}$ pro libovolné $I \in \mathcal{I}$).
- $\sigma_0 = \bot$. Pak $\sigma_1 \neq \bot$. Proto $\models \{A\}\, c_0\, \{\mathbf{false}\}$, zatímco $\not\models \{A\}\, c_1\, \{\mathbf{false}\}$.
- $\sigma_1 = \bot$. Podobně.

□

Označkované příkazy

- Platnost tvrzení $\{A\}\, c\, \{B\}$ o částečné korektnosti lze (efektivně) redukovat na platnost tvrzení $A \Rightarrow A[\![c, B]\!]$, kde $A[\![c, B]\!]$ vyjadřuje nejslabší vstupní podmínku pro c a B.
- Pokud bychom měli k dispozici program, který rozhoduje platnost tvrzení z **Assn**, bylo by možné algoritmicky ověřit i platnost tvrzení o částečné korektnosti.
- Takový program z principielních důvodů neexistuje; existují ale „dokazovače vět“ (theorem provers), které umožňují efektivně dokázat platnost určitých podtříd platných tvrzení **Assn**.
- Tyto nástroje mohou být velmi užitečné, pokud se kombinují s lidskou inteligencí.
- Myšlenka: místo konstrukce nejslabší vstupní podmínky doplníme prvky **Assn** přímo do příkazu (programu), čímž vznikne označkovaný příkaz. Pak algoritmicky sestavíme množinu tvrzení z **Assn** (tzv. verifikačních podmínek), jejichž platnost je postačující podmínkou pro korektnost daného označkovaní.
- Označkované příkazy **ACom**

$$c \quad ::= \quad \mathbf{skip} \mid X := a \mid c_0 ; X := a \mid c_0 ; \{D\}\bar{c} \mid \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1 \mid \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ \{D\}c$$

kde $X \in \mathbf{Var}$, $a \in \mathbf{Aexp}$, $b \in \mathbf{Bexp}$, $D \in \mathbf{Assn}$ a $\bar{c}$ je označkovaný příkaz který není přiřazením.
- Označkované tvrzení o částečné korektnosti je trojice tvaru $\{A\}\, c\, \{B\}$, kde $A, B \in \mathbf{Assn}$ a $c \in \mathbf{ACom}$. Toto tvrzení je platné, je-li platné tvrzení $\{A\}\, c'\, \{B\}$ kde $c' \in \mathbf{Com}$ vznikne z c vynecháním všech prvků **Assn**.

Verifikační podmínky

- Označkovaný **while**-cyklus

$$\{A\}\ \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ \{D\}c\ \{B\} \qquad (*)$$

obsahuje $D \in \mathbf{Assn}$, které by mělo být invariantem, což znamená že $\{D \wedge b\}\, c\, \{D\}$ je platné tvrzení. Pokud už víme, že D je invariant, stačí pro platnost (*) dokázat platnost tvrzení $A \Rightarrow D$ a $D \wedge \neg b \Rightarrow B$.

- Množina verifikačních podmínek pro označkované tvrzení $\{A\}\, c\, \{B\}$, psáno $\mathcal{V}(\{A\}\, c\, \{B\})$, je definována induktivně takto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\{A\}\,\textbf{skip}\,\{B\}) &= \{A \Rightarrow B\} \\
\mathcal{V}(\{A\}\, X := a\, \{B\}) &= \{A \Rightarrow B[a/X]\} \\
\mathcal{V}(\{A\}\, c_0\,;\, X := a\, \{B\}) &= \mathcal{V}(\{A\}\, c_0\, \{B[a/X]\}) \\
\mathcal{V}(\{A\}\, c_0\,;\, \{D\}\bar{c}\, \{B\}) &= \mathcal{V}(\{A\}\, c_0\, \{D\}) \cup \mathcal{V}(\{D\}\, c_1\, \{B\}) \text{ kde } \bar{c} \text{ není přiřazení} \\
\mathcal{V}(\{A\}\,\textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ c_0\ \textbf{else}\ c_1\, \{B\}) &= \mathcal{V}(\{A \wedge b\}\, c_0\, \{B\}) \cup \mathcal{V}(\{A \wedge \neg b\}\, c_1\, \{B\}) \\
\mathcal{V}(\{A\}\,\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ \{D\}c\, \{B\}) &= \mathcal{V}(\{D \wedge b\}\, c\, \{D\}) \cup \{A \Rightarrow D\} \cup \{D \wedge \neg b \Rightarrow B\}
\end{aligned}$$

Věta 17. *Nechť* $\{A\}\, c\, \{B\}$ *je označkované tvrzení o částečné korektnosti. Jestliže všechny prvky* $\mathcal{V}(\{A\}\, c\, \{B\})$ *jsou platná tvrzení, je i* $\{A\}\, c\, \{B\}$ *platné.*

Důkaz. Indukcí ke struktuře c. □

Příklad:

- $\{\textbf{true}\}\ \textbf{while false do}\ \{\textbf{false}\}\ \textbf{skip}\ \{\textbf{true}\}$
- Toto označkované tvrzení o částečné korektnosti je platné.
- $\mathcal{V}(\{\textbf{true}\}\ \textbf{while false do}\ \{\textbf{false}\}\ \textbf{skip}\ \{\textbf{true}\}) =$

$$\mathcal{V}(\{\textbf{false} \wedge \textbf{false}\}\ \textbf{skip}\ \{\textbf{false}\}) \cup \{\textbf{true} \Rightarrow \textbf{false}\} \cup \{(\textbf{false} \wedge \neg\textbf{false}) \Rightarrow \textbf{true}\}$$

- $\textbf{true} \Rightarrow \textbf{false} \in \mathcal{V}(\{\textbf{true}\}\ \textbf{while false do}\ \{\textbf{false}\}\ \textbf{skip}\ \{\textbf{true}\})$ platné není; platnost prvků $\mathcal{V}(\{A\}\, c\, \{B\})$ je tedy pouze postačující, nikoliv nutná podmínka platnosti $\{A\}\, c\, \{B\}$.

Operační sémantika paralelních programů

- Syntaxi jazyka **IMP** rozšíříme o paralelní operátor $||$; paralelní příkazy **PCom** jsou definovány rovnicí

$$c \quad ::= \quad \textbf{skip} \mid X := a \mid c_0;c_1 \mid \textbf{if } b \textbf{ then } c_0 \textbf{ else } c_1 \mid \textbf{while } b \textbf{ do } c \mid c_0||c_1$$

- SOS sémantiku II. typu rozšíříme o pravidla

$$\frac{\langle c_0, \sigma\rangle \mapsto \langle c_0', \sigma'\rangle}{\langle c_0||c_1, \sigma\rangle \mapsto \langle c_0'||c_1, \sigma'\rangle} \qquad \frac{\langle c_1, \sigma\rangle \mapsto \langle c_1', \sigma'\rangle}{\langle c_0||c_1, \sigma\rangle \mapsto \langle c_0||c_1', \sigma'\rangle}$$

- Podle stávajících pravidel např.

$$\langle (X := 1||X := 2); X := 3, \sigma\rangle \mapsto$$
$$\langle (\textbf{skip}||X := 2); X := 3, \sigma[1/X]\rangle \mapsto$$
$$\langle (\textbf{skip}||\textbf{skip}); X := 3, \sigma[2/X]\rangle$$

  Z konfigurace $\langle (\textbf{skip}||\textbf{skip}); X := 3, \sigma[2/X]\rangle$ není možné odvodit žádný přechod, ačkoliv příkaz $X := 3$ je v této konfiguraci proveditelný (podle intuitivního chápání významu „;“ a „$||$“).

- Zavedeme predikát **IsSkip** předpisem

$$\begin{aligned}
\textbf{IsSkip}(\textbf{skip}) &= \textbf{true} \\
\textbf{IsSkip}(X := a) &= \textbf{false} \\
\textbf{IsSkip}(c_0; c_1) &= \textbf{IsSkip}(c_0) \wedge \textbf{IsSkip}(c_1) \\
\textbf{IsSkip}(\textbf{if } b \textbf{ then } c_0 \textbf{ else } c_1) &= \textbf{false} \\
\textbf{IsSkip}(\textbf{while } b \textbf{ do } c) &= \textbf{false} \\
\textbf{IsSkip}(c_0||c_1) &= \textbf{IsSkip}(c_0) \wedge \textbf{IsSkip}(c_1)
\end{aligned}$$

- Pravidlo $\langle \textbf{skip}; c, \sigma\rangle \mapsto \langle c, \sigma\rangle$ nahradíme pravidlem

$$\frac{}{\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \mapsto \langle c_1, \sigma\rangle}\ \textbf{IsSkip}(c_0)$$

- Nyní je již odvoditelný přechod $\langle (\textbf{skip}||\textbf{skip}); X := 3, \sigma[2/X]\rangle \mapsto \langle X := 3, \sigma[2/X]\rangle$
- Paralelní programy mohou být nedeterministické.

- Ověření sémantické ekvivalence.
  - ⋆ Specifikace i skutečná implementace se popíše ve vhodném „vyšším“ jazyce (CCS, Petriho sítě, apod.) s dobře definovanou operační sémantikou.
  - ⋆ Dokáže se, že specifikace a implementace jsou ekvivalentní.
  - ⋆ V tomto kontextu je formalizace pojmu sémantické ekvivalence netriviální problém (bisimulační ekvivalence apod.)
- Ověření platnosti formule vhodné logiky.
  - ⋆ „Vhodnou“ logikou je v tomto případě obvykle nějaký typ modální (temporální) logiky.
  - ⋆ temporální logiky lze klasifikovat z mnoha hledisek, např.
    - ∗ „state-based“ × „action-based“
    - ∗ „linear-time“ × „branching-time“
- Z praktického hlediska je hlavní omezující faktor velikost množiny konfigurací.

„Obecná“ definice LTL

Syntaxe LTL

- Buď $At = \{p, q, r, \ldots\}$ spočetná množina atomických výroků.

  $\varphi \quad ::= \quad \mathbf{true} \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \mathcal{X}\varphi \mid \varphi_1 \,\mathcal{U}\, \varphi_2$

  Dále definujeme $\mathcal{F}\varphi \equiv \mathbf{true}\,\mathcal{U}\,\varphi$ a $\mathcal{G}\varphi \equiv \neg\mathcal{F}\neg\varphi$
- Buď φ LTL formule.
  - ⋆ $At(\varphi)$ označuje množinu všech atomických výroků, které se vyskytují ve φ;
  - ⋆ charakteristická abeceda formule φ je množina $\Sigma_\varphi = 2^{At(\varphi)}$;
  - ⋆ Σ_φ^ω označuje množinu všech nekonečných slov nad abecedou Σ_φ;
  - ⋆ nechť $w \in \Sigma_\varphi^\omega$. Symbol $w(i)$ označuje i-tý znak slova w; symbol w_i označuje i-tý sufix slova w pro každé $i \in \mathbb{N}_0$.

  Příklad:
- $\varphi = (p \vee q)\,\mathcal{U}\,(p \wedge q)$
- $At(\varphi) = \{p, q\}$
- $\Sigma_\varphi = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$
- je-li $w = \emptyset\{p\}\emptyset\{q\}\{q\}\{p, q\}\cdots$, platí $w(2) = \emptyset$, $w(3) = \{q\}$, $w_2 = \emptyset\{q\}\{q\}\{p, q\}\cdots$

Sémantika LTL

- Buď φ LTL formule. Platnost φ pro dané $w \in \Sigma_\varphi^\omega$ je definována indukcí ke struktuře φ:

$$
\begin{array}{lcl}
w \models \mathbf{true} & & \\
w \models p & \iff & p \in w(0) \\
w \models \neg\varphi & \iff & w \not\models \varphi \\
w \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 & \iff & w \models \varphi_1 \quad \wedge \quad w \models \varphi_2 \\
w \models \mathcal{X}\varphi & \iff & w_1 \models \varphi \\
w \models \varphi_1 \,\mathcal{U}\, \varphi_2 & \iff & \exists j: \quad w_j \models \varphi_2 \quad \wedge \quad \forall i < j: \; w_i \models \varphi_1
\end{array}
$$

- Charakteristický jazyk LTL formule φ je množina nekonečných slov $L_\varphi = \{w \in \Sigma_\varphi^\omega \mid w \models \varphi\}$

LTL jako jazyk vlastností paralelních a neukončených programů

- Uvážíme „instanci“ LTL logiky, kde $At = \mathbf{Assn}$, tj.

$$\varphi \quad ::= \quad \mathbf{true} \mid A \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \mathcal{X}\varphi \mid \varphi_1 \,\mathcal{U}\, \varphi_2$$

  kde $A \in \mathbf{Assn}$.

- Nechť $c \in \mathbf{PCom}$ a $\sigma \in \Sigma$. Běh programu c ze stavu σ je nekonečná posloupnost konfigurací

$$\alpha \;=\; \langle c_0, \sigma_0\rangle \langle c_1, \sigma_1\rangle \langle c_2, \sigma_2\rangle \langle c_3, \sigma_3\rangle \cdots,$$

  kde $c_0 = c$, $\sigma_0 = \sigma$ a $\langle c_i, \sigma_i\rangle \mapsto \langle c_{i+1}, \sigma_{i+1}\rangle$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$.

- Buď φ LTL formule, I interpretace a α běh. Charakteristické slovo běhu α vzhledem k formuli φ a interpretaci I je slovo $\alpha_\varphi^I \in \Sigma_\varphi^\omega$, kde $\alpha_\varphi^I(i) = \{A \in \mathbf{Assn}(\varphi) \mid \sigma_i \models^I A\}$.
- Běh α splňuje LTL formuli φ při interpretaci I, psáno $\alpha \models^I \varphi$, jestliže $\alpha_\varphi^I \models \varphi$.
- Konfigurace $\langle c, \sigma\rangle$ splňuje LTL formuli φ při interpretaci I, psáno $\langle c, \sigma\rangle \models^I \varphi$, jestliže pro každý běh α začínající v $\langle c, \sigma\rangle$ platí $\alpha \models^I \varphi$.
- Množina vlastností běhů vyjádřitelných v LTL je uzavřená na negaci. Množina vlastností konfigurací vyjádřitelných v LTL na negaci uzavřená není (v důsledku „vestavěné“ univerzální kvantifikace přes běhy)!

Příklady:

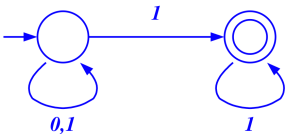
- $c \equiv$ **while tt do** $X := X + 1$. Pak $\langle c, \sigma\rangle \models^I \mathcal{F}(X > 5)$ pro každé σ a I.
- $c \equiv X := 2$. Pak $\langle c, \sigma\rangle \models^I \mathcal{G}(X = 3)$ pro každé σ a I, neboť neexistuje žádný běh začínající v $\langle c, \sigma\rangle$.
- $c \equiv X := 2 \parallel$ **while tt do skip**. Pak $\langle c, \sigma\rangle \not\models^I \mathcal{G}(X = 3)$ pro každé σ a I. Např. ale platí $\langle c, \sigma\rangle \models^I (X = 2) \Rightarrow \mathcal{G}(X = 2)$
- $c \equiv X := 2 \parallel X := 3 \parallel$ **while tt do skip**. Uvažme stav σ kde $\sigma(X) = 2$. Pak $\langle c, \sigma\rangle \not\models^I \mathcal{F}(X = 3)$ a $\langle c, \sigma\rangle \not\models^I \mathcal{G}(X \neq 3)$ pro každé I.

Problém: Jak efektivně ověřit, zda $\langle c, \sigma\rangle \models^I \varphi$?

ω-regulární jazyky a Büchiho automaty

- Büchiho automat je pětice $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde
  - Q je konečná množina stavů;
  - Σ je konečná abeceda;
  - $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ je přechodová relace (místo $(p, a, q) \in \delta$ budeme psát $p \xrightarrow{a} q$);
  - $q_0 \in Q$ je počáteční stav;
  - $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů.
- Výpočet automatu $\mathcal{A}$ na slově $w \in \Sigma^\omega$ je nekonečná posloupnost stavů $p_0\, p_1\, p_2 \cdots$ taková, že $p_0 = q_0$ a $p_i \xrightarrow{w(i)} p_{i+1}$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$. Výpočet je akceptující, jestliže se v něm některý koncový stav vyskytuje ∞-krát.
- Automat $\mathcal{A}$ akceptuje jazyk $L(\mathcal{A}) \subseteq \Sigma^\omega$ složený ze slov, pro která existuje akceptující výpočet.
- Buď Σ konečná abeceda. $L \subseteq \Sigma^\omega$ je ω-regulární. pokud existuje Büchiho automat $\mathcal{A}$ takový, že $L(\mathcal{A}) = L$.

Příklad: Uvažme následující Büchiho automat $\mathcal{A}$:



Pak $L(\mathcal{A})$ obsahuje právě ta nekonečná slova nad abecedou $0, 1$, ve kterých se 0 vyskytuje konečně-krát.

Vlastnosti Büchiho automatů a ω-regulárních jazyků

Věta 18. *Nechť L_1, L_2 jsou ω-regulární jazyky nad abecedou Σ. Pak $L_1 \cup L_2$ a $L_1 \cap L_2$ jsou také ω-regulární jazyky.*

Důkaz. Nechť $L_1 = L(\mathcal{A}_1)$ a $L_2 = L(\mathcal{A}_2)$, kde $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ a $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. Zřejmě $L_1 \cup L_2 = L(\mathcal{A}^{\cup})$, kde

$$\mathcal{A}^{\cup} \quad = \quad (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}, \quad \Sigma, \quad \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{(q_0, a, q) \mid q_1 \xrightarrow{a} q \vee q_2 \xrightarrow{a} q\}, \quad q_0, \quad F_1 \cup F_2)$$

kde $q_0 \notin Q_1 \cup Q_2$. Dále $L_1 \cap L_2 = L(\mathcal{A}^{\cap})$, kde

$$\mathcal{A}^{\cap} \quad = \quad (Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\}, \quad \Sigma, \quad \delta^{\cap}, \quad (q_1, q_2, 1), \quad F_1 \times Q_2 \times \{1\})$$

a $\delta^{\cap}$ je určena předpisem

- $(p, q, 1) \xrightarrow{a} (p', q', 1)$, jestliže $p \xrightarrow{a} p'$, $q \xrightarrow{a} q'$ a $p \notin F_1$;
- $(p, q, 1) \xrightarrow{a} (p', q', 2)$, jestliže $p \xrightarrow{a} p'$, $q \xrightarrow{a} q'$ a $p \in F_1$;
- $(p, q, 2) \xrightarrow{a} (p', q', 2)$, jestliže $p \xrightarrow{a} p'$, $q \xrightarrow{a} q'$ a $q \notin F_2$;
- $(p, q, 2) \xrightarrow{a} (p', q', 1)$, jestliže $p \xrightarrow{a} p'$, $q \xrightarrow{a} q'$ a $q \in F_2$.

□

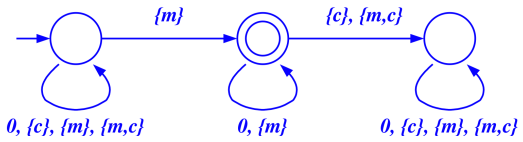
Věta 19. *Nechť $\mathcal{A}$ je Büchiho automat. Problém, zda $L(\mathcal{A}) = \emptyset$ je rozhodnutelný (v polynomiálním čase).*

Důkaz. Nechť $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Stačí si uvědomit, že $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ právě když existuje $f \in F$ takový, že f je v (grafu) automatu $\mathcal{A}$ dosažitelný z q_0 a existuje cesta z f do f délky alespoň 1. Oba tyto (grafové) problémy jsou snadno rozhodnutelné v polynomiálním čase (dokonce v nedeterministickém logaritmickém prostoru). □

Vztah LTL a Büchiho automatů

Věta 20. *Buď φ LTL formule. Jazyk L_φ je ω-regulární a lze algoritmicky sestrojit Büchiho automat $\mathcal{A}_\varphi$ velikosti $\mathcal{O}(2^{|\varphi|})$, který akceptuje L_φ.*

Příklad: Uvažme formuli $\varphi = \mathcal{F}(m \wedge \mathcal{G}\neg c)$. Pak jazyk L_φ (nad abecedou $\Sigma_\varphi = \{\emptyset, \{m\}, \{c\}, \{m, c\}\}$) je akceptován Büchiho automatem



Ověřování platnosti LTL formulí

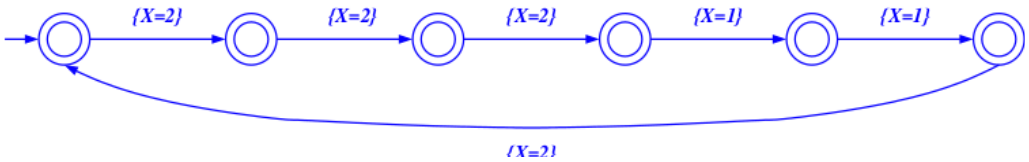
- Buď $c \in \mathbf{PCom}$ a $\sigma \in \Sigma$ takové, že přechodový systém $(S, \{\tau\}, \mapsto)$, kde $S = \{\langle c', \sigma' \rangle \mid \langle c, \sigma \rangle \rightarrow^* \langle c', \sigma' \rangle\}$, má konečně mnoho konfigurací.
- Nechť φ je LTL formule a I interpretace. Definujeme Büchiho automat $\mathcal{A} = (S, \Sigma_\varphi, \delta, \langle c, \sigma \rangle, S)$, kde $\langle c', \sigma' \rangle \xrightarrow{M} \langle c'', \sigma'' \rangle$ právě když $M = \{A \in \mathbf{Assn}(\varphi) \mid \sigma' \models^I \varphi\}$.
- Platí $\langle c, \sigma \rangle \models^I \varphi$ právě když $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{A}_{\neg\varphi}) = \emptyset$.

Příklad:

- Nechť $c \equiv$ **while tt do** $(X := 1; X := 2)$, $\varphi \equiv \mathcal{G}(X{=}1 \Rightarrow \mathcal{F}(X{=}2)$, $I \in \mathcal{I}$ a $\sigma \in \Sigma$ kde $\sigma(X) = 2$.
- Označíme-li $w \equiv$ **while tt do** $(X := 1; X := 2)$, platí

$$
\begin{array}{l}
\langle w, \sigma\rangle \quad \mapsto \\
\langle \textbf{if tt then } (X := 1; X := 2; w) \textbf{ else skip}, \ \sigma\rangle \quad \mapsto \\
\langle X := 1; X := 2; w, \ \sigma\rangle \quad \mapsto \\
\langle \textbf{skip}; X := 2; w, \ \sigma[1/X]\rangle \quad \mapsto \\
\langle X := 2; w, \ \sigma[1/X]\rangle \quad \mapsto \\
\langle \textbf{skip}; w, \ \sigma\rangle \quad \mapsto \\
\langle w, \ \sigma\rangle
\end{array}
$$

Automat $\mathcal{A}$ tedy vypadá následovně:



- Dále $\neg\varphi \equiv \mathcal{F}(X{=}1 \wedge \mathcal{G}(\neg(X{=}2))$, lze tedy použít (mírně modifikovaný) automat z předchozího příkladu.
- Nyní stačí sestrojit automat $\mathcal{A}^{\cap}$ z důkazu věty 18 a ověřit, zda $L(\mathcal{A}^{\cap}) = \emptyset$ (což lze rovněž provést algoritmicky podle věty 19).