1. Množina jednoduchých pravdivostních výrazů **SBexp** je dána předpisem

$$b \ ::= \ \texttt{true} \mid \texttt{false} \mid b_0 \wedge b_1 \mid b_0 \vee b_1$$

Pro prvky **SBexp** definujte operační sémantiku 2. typu (tj. typu který byl na přednášce prezentován později), která popisuje tzv. „líné“ vyhodnocování. To spočívá v tom, že taková disjunkce, kde je jedním z argumentů `true`, se vyhodnotí v jediném kroku na `true` aniž by se přitom vyhodnocoval druhý argument; podobně konjunkce, kde je jedním z argumentů `false`, se v jediném kroku vyhodnotí na `false`. Přitom platí, že při vyhodnocování má přednost *levý* argument. Sémantika by měla být plně deterministická v tom smyslu, že na každý prvek **SBexp**, který je různý od `true` a `false`, lze aplikovat přesně jedno pravidlo.

2. Uvažme jazyk IMP rozšířený o cyklus **repeat-until** s následující syntaxí:

repeat c **until** b

kde $c \in$ **Com** a $b \in$ **Bexp**. Definujte *denotační* sémantiku cyklu **repeat-until**, která je v souladu s jeho intuitivním významem (b je podmínka na *ukončení* cyklu, cyklus se vždy provede alespoň jednou). Pomůcka: využijte faktu, že denotační sémantika cyklu **while-do** je již definována.

3. Buď w následující **while** cyklus:

$$\begin{array}{l} \textbf{while} \ \ (Y \leq 3) \ \ \textbf{do} \\ \quad (\ \ X := X - 1; \\ \quad\quad\ Y := X + 2 \\ \quad) \end{array}$$

Uvažme následující tvrzení (prvky **Assn**):

$\texttt{true}, \ \texttt{false}, \ Y < 2, \ X < 3, \ X = 4$

Která z těchto tvrzení jsou invarianty w a která nikoliv? Pro každý z invariantů zformulujte a dokažte (užitím odvozovacího systému Hoarovy logiky) příslušné tvrzení o částečné korektnosti které říká, že jde skutečně o invariant.

4. Buď P následující program:

$$\begin{array}{l} \textbf{if} \ \ Y = 6 \ \ \textbf{then} \ \ X := Y - 2; Y := X + 3 \\ \qquad\qquad\quad \textbf{else} \ \ Y := X + 8 \end{array}$$

Dokažte v odvozovacím systému Hoarovy logiky tvrzení $\{Y = 6\}\, P\, \{Y = 7\}$.

5. Dokažte nebo uveďte protipříklad pro následující tvrzení: Nechť $a_0, a_1 \in$ **Aexp**. Existuje-li $a \in$ **Aexp** takové, že $\mathcal{A}[\![a_0 * a]\!] = \mathcal{A}[\![a_1 * a]\!]$, pak $\mathcal{A}[\![a_0]\!] = \mathcal{A}[\![a_1]\!]$.

6. Dokažte nebo uveďte protipříklad pro následující tvrzení: Je-li $A \wedge B$ invariant daného **while**-cyklu, jsou A i B invarianty tohoto cyklu.

7. Uvažme cyklus **while** b **do** c. Dokažte nebo udejte protipříklad pro následující tvrzení: Jsou-li $A, B \in \mathit{Assn}$ taková, že $\models \{A\}\, c\, \{A\}$ a $\vdash \{B\}\, c\, \{B\}$, pak $A \wedge B$ je invariant uvedeného cyklu.

8. V Hoarově odvozovacím systému dokažte následující tvrzení o částečné korektnosti:

$$\{Z = 5\}\ \textbf{while true do}\ X := 3\ \{Y = 6\}$$