FORMÁLNÍ JAZYKY A AUTOMATY I

*Řešení sady problémů **3.***

1. Automat A_1 obsahuje nedosažitelný stav q_9. Při aplikaci algoritmu pro minimalizaci konečného automatu obdržíme postupně následující třídy ekvivalentních stavů:

   - $I = \{q_0, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_{10}\}$
     $II = \{q_1, q_8\}$
   - $I_1 = \{q_0, q_2\}$
     $I_2 = \{q_3, q_4, q_6, q_{10}\}$
     $I_3 = \{q_5, q_7\}$
     $II = \{q_1, q_8\}$
   - $I_1 = \{q_0, q_2\}$
     $I_2' = \{q_3\}$
     $I_2'' = \{q_4, q_6\}$
     $I_2''' = \{q_{10}\}$
     $I_3 = \{q_5, q_7\}$
     $II = \{q_1, q_8\}$

   Automat A_2 neobsahuje nedosažitelné stavy a je minimální. Po převedení obou automatů do kanonického tvaru obdržíme v obou případech následující automat:

   $$K = [\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{1\}]$$

   $$\begin{array}{rcl}
\delta(1, a) & = & 2 \\
\delta(1, b) & = & 3 \\
\delta(2, a) & = & 4 \\
\delta(2, b) & = & 1 \\
\delta(3, a) & = & 1 \\
\delta(3, b) & = & 5 \\
\delta(4, a) & = & 6 \\
\delta(4, b) & = & 2 \\
\delta(5, a) & = & 3 \\
\delta(5, b) & = & 6 \\
\delta(6, a) & = & 6 \\
\delta(6, b) & = & 6
\end{array}$$

   Tedy automaty A_1 a A_2 jsou ekvivalentní.

2. Deterministický konečný automat je určen následující tabulkou:

		a	b
$\longrightarrow$	0	0	01
	01	02	012
	02	03	013
	03	04	014
$\longleftarrow$	04	0	01
	012	023	0123
	013	024	0124
$\longleftarrow$	014	02	012
	023	034	0134
$\longleftarrow$	024	03	013
$\longleftarrow$	034	04	014
	0123	0234	01234
$\longleftarrow$	0124	023	0123
$\longleftarrow$	0134	024	0124
$\longleftarrow$	0234	034	0134
$\longleftarrow$	01234	0234	01234

3. Je třeba dokázat dvě inkluze:

$\mathbf{L(G)} \subseteq \mathbf{L}$:
Dokážeme, že pro libovolnou větnou formu w, kde $S \Rightarrow^* w$, platí: $2(\#_A(w) + \#_a(w)) = \#_B(w) + \#_b(w)$. Důkaz provedeme indukcí vzhledem k *délce odvození* větné formy w.

- **n=0:** - pak $w = S$ a $2(\#_A(S) + \#_a(S)) = 0 = \#_B(S) + \#_b(S)$.
- **indukční krok:** Předpokládejme, že tvrzení platí pro každou větnou formu, jejíž délka odvození je n. Ukážeme, že pak toto tvrzení platí též pro každou větnou formu, která má délku odvození $n+1$. Nechť w je větná forma o délce odvození $n+1$ a nechť $S \Rightarrow v_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow v_n \Rightarrow w$ je její odvození v gramatice G. Větná forma v_n má délku odvození n, proto dle indukčního předpokladu platí:

$$2(\#_A(v_n) + \#_a(v_n)) = \#_B(v_n) + \#_b(v_n)$$

  Derivace $v_n \Rightarrow w$ vznikla aplikací jednoho z následujících pravidel:
  - $S \to ABBS$ nebo $S \to ABB$.
    Pak:
    $\#_A(w) + \#_a(w) = \#_A(v_n) + \#_a(v_n) + 1$ a
    $\#_B(w) + \#_b(w) = \#_B(v_n) + \#_b(v_n) + 2$ a tedy
    $2(\#_A(w) + \#_a(w)) = \#_B(w) + \#_b(w)$
  - $AB \to BA,\ BA \to AB,\ A \to a$ nebo $B \to b$.
    Pak:
    $\#_A(w) + \#_a(w) = \#_A(v_n) + \#_a(v_n)$ a
    $\#_B(w) + \#_b(w) = \#_B(v_n) + \#_b(v_n)$, tedy
    $2(\#_A(w) + \#_a(w)) = \#_B(w) + \#_b(w)$

Každé slovo u jazyka $L(G)$ je větná forma, která neobsahuje neterminály. Proto $2.\#_a(u) = \#_b(u)$.

$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L(G)}$:
Nechť $u \in L$. Ukážeme, že slovo u lze odvodit v gramatice G. Nechť $n = \#_a(u)$. Pro odvození slova u v gramatice G nejprve aplikujeme $(n-1)$ krát pravidlo $S \to ABBS$ a pak jedenkrát pravidlo $S \to ABB$. Obdržíme větnou formu $w = (ABB)^n$, pro niž platí $\#_A(w) = \#_a(u) \wedge \#_B(w) = \#_b(u)$. Nyní pomocí opakované aplikace pravidel $AB \to BA$ a $BA \to AB$ přepíšeme větnou formu w na větnou formu w' tak, aby platilo:

$$\forall i \in N,\ 1 \leq i \leq 3n : \text{na } i\text{-tém místě ve slově } u \text{ je } a \iff \text{na } i\text{-tém místě ve větné formě } w' \text{ je } A$$

(striktně vzato, měli bychom *dokázat*, že takovou větnou formu w' lze pomocí uvedených dvou pravidel z větné formy w vždy vytvořit. Tento důkaz však nepožadujeme - tvrzení pokládáme za zřejmé). Nyní pomocí aplikace pravidel $A \to a$ a $B \to b$ přepíšeme větnou formu w' na slovo u.

4. **a)** Nechť A je konečný automat s k stavy akceptující jazyk L.

$'\Longrightarrow'$ Z nekonečnosti jazyka L plyne existence slova $w \in L$ délky $|w| \geq k$. Když $|w| < 2k$, tvrzení je dokázano. Předpokládejme $|w| \geq 2k$. Na slovo w můžeme aplikovat pumping lemu. Ta zaručuje existenci slov v, x, y takových, že $x \neq \varepsilon$, $|x| \leq k$, $w = vxy$ a $vy \in L$. Délku slova vy můžeme ohraničit takto: $|w| - k \leq |vy| < |w|$. Nyní buď $|vy| < 2k$, anebo pro něj můžeme uvedenou úvahu zopakovat. Protože se vždy slovo zkrátí minimálně o jeden a maximálně o k symbolů, jeho délka po konečném počtě zkracování bude náležet do intervalu $< k, 2k)$ délky k.

$'\Longleftarrow'$ Opačná inkluze plyne přímo z pumping lemy: současně se slovem w délky alespoň k musí L obsahovat slova vx^iy pro všechna $i \geq 0$, přičemž $w = vxy$ a $x \neq \varepsilon$.

b) Tvrzení obecně neplatí. Jako protipříklad stačí vzít např. automat A akceptující jazyk $\{abc\}^*$; $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_0\})$, kde $\delta(q_0, a) = q_1$, $\delta(q_1, b) = q_2$ a $\delta(q_2, c) = q_0$.