Zadání a řešení testu z matematiky a zpráva o výsledcích přijímacího řízení do magisterského navazujícího studia od jara 2018

Zpráva o výsledcích přijímacího řízení

do magisterského navazujícího studia od jara 2018

Počet podaných přihlášek	117
Počet přihlášených uchazečů	104
Počet uchazečů, kteří splnili podmínky přijetí	53
Počet uchazečů, kteří nesplnili podmínky přijetí	51
Počet uchazečů přijatých ke studiu, bez uvedení počtu uchazečů přijatých ke studiu až na základě výsledku přezkoumání původního rozhodnutí	53
Počet uchazečů přijatých celkem	53
Percentil pro přijetí	15,00

Základní statistické charakteristiky

		Informatika	Matematika	Celkem
Počet otázek		30	25	55
Počet uchazečů, kteří se zúčastnili přijímací zkoušky		57	57	57
Nejlepší možný výsledek		30.00	25.00	55.00
Nejlepší skutečně dosažený výsledek		24.25	19.25	41.00
Průměrný výsledek		13.08	9.46	22.54
Medián		13.00	8.75	22.50
Směrodatná odchylka		5.29	4.84	9.23
	Percentil			
Decilové hranice výsledku *	10	6.50	3.00	11.50
	20	10.00	5.50	16.25
	30	11.25	7.50	18.25
	40	12.25	8.00	19.75
	50	13.00	8.75	22.50
	60	13.50	11.00	23.75
	70	15.25	11.75	27.25
	80	18.25	13.50	31.00
	90	20.25	16.75	35.25

* Decilové hranice výsledku zkoušky vyjádřené d1, d2, d3, d4, d5, d6, d7, d8, d9 jsou hranice stanovené tak, že rozdělují uchazeče seřazené podle výsledku zkoušky do stejně velkých skupin, přičemž d5 je medián.

Přijímací zkouška - Matematika

Jméno a příjmení – pište do okénka	*Číslo přihlášky*	*Číslo zadání*
		10

Množiny, relace, funkce, logika

1 Ze které z následujících výrokových formulí logicky vyplývá formule $A \wedge \neg B$?

A $\neg B \ \wedge \ (A \Rightarrow \neg B)$

***B** $A \ \wedge \ (A \Rightarrow \neg B)$

C $A \Rightarrow \neg B$

D A

E $A \Leftrightarrow \neg B$

2 Která z následujících predikátových formulí *není tautologie*? (Zde P, Q jsou různé unární predikátové symboly.)

A $((\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, Q(x))) \Leftarrow \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$

***B** $((\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))) \Rightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$

C $((\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, Q(x))) \Rightarrow \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$

D $((\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))) \Leftarrow \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$

E $((\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))) \Rightarrow \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$

3 Uvažme relaci $\leq$ na množině $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ (tj. množině dvojic kladných celých čísel) takovou, že $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ právě tehdy, když a_1 je menší nebo rovno b_1 a zároveň a_2 je menší nebo rovno b_2. Kolik má relace $\leq$ minimálních prvků?

A tato relace není uspořádání
***B** 1
C nekonečně mnoho
D žádný
E 2

4 Mějme tříprvkovou množinu $A = \{a, b, \{a\}\}$. Kolik existuje různých podmnožin množiny A?

A 7
B 4
***C** 8
D 5
E 6

5 Nechť $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ jsou dvě libovolné *tranzitivní* relace na množině celých čísel. Které z následujících tvrzení *je obecně pravdivé*? (Zde $R_1 \setminus R_2$ značí množinový rozdíl relací R_1 a R_2.)

***A** $R_1 \cap R_2$ je tranzitivní relace

B R_1 je symetrická relace

C $R_1 \cup R_2$ je tranzitivní relace

D $R_1 \setminus R_2$ je tranzitivní relace

E R_1 je reflexivní relace

6 Která z následujících unárních funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na množině reálných čísel je *surjektivní*?

A x^2

B $-x^2$

C x^4

D x^0

***E** x^3

Lineární algebra

7 Určete, pro kolik různých parametrů $p \in \mathbb{R}$ je následující matice *singulární* (tj. má determinant 0).

$$\begin{pmatrix} -3-p & 0 & 4 \\ -4 & 1-p & 4 \\ -2 & 0 & 3-p \end{pmatrix}$$

A 1

B ∞

***C** 2

D 3

E 0

8 Určete, která z následujících matic zadává lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotující rovinu o úhel $\frac{\pi}{6}$ proti směru hodinových ručiček?

A $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

***E** $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

9 Uvažme následující soustavu rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3x + 6y + 9z &= 9 \\ 2x - y + z &= 11 \\ 7x + 4y + 11z &= 30 \end{aligned}$$

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$.

B Soustava má právě jedno řešení.

C Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří přímku v $\mathbb{R}^3$.

***D** Soustava nemá řešení.

E Všechny body $\mathbb{R}^3$ jsou řešením dané soustavy.

10 $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

A $\begin{pmatrix} 11 & -14 & -5 \\ 8 & -10 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

***B** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 11 & -14 & -5 \\ 7 & -9 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

E Součin zadaných matic není definován.

11 Uvažme vektor $\mathbf{u} = (-3, 1, 5)$ ve standardní bázi $[(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)]$. Nalezněte souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $[(1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1)]$.

A Souřadnice neexistují, protože zadané vektory netvoří bázi.

B $(1, 0, 4)$

C $(5, -4, 4)$

***D** $(-1, 1, 3)$

E $(-7, 1, 9)$

Matematická analýza

12 Usain Bolt se pohybuje po rovné dráze. Jeho poloha je pro čas $t \in [0, 10]$ dána funkcí

$$f(t) = t^3 - 15t^2 + 63t - 49.$$

Určete, ve kterém z následujících časových intervalů $I \subseteq [0, 10]$ běží Bolt celou dobu pozpátku. (Předpokládáme, že se v době běhu neotáčí a vybíhá směrem dopředu.)

A Bolt nikdy nepoběží pozpátku, jen v čase $t = 7$ zastaví.

B $I = (0, 1)$

C $I = (7, 10]$

D $I = (1, 7)$

***E** $I = (3, 7)$

---

13 Spočtěte integrál $\int_0^\pi x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

A 0

B $\pi + 2$

***C** -2

D 2

E $\pi - 2$

---

14 Vypočtěte následující limitu posloupnosti: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1-n^2}{n \log_2 n}} =$

A ∞

B 1

***C** 0

D $-\infty$

E e

---

15 Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je daná předpisem $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x^2)$.

Určete, které z následujících tvrzení je pravdivé.

A Funkce f je surjektivní.

B Funkce f je lichá

***C** Funkce f je sudá.

D Funkce f je injektivní.

E Funkce f je periodická.

---

16 Mějme funkci $f(x) = \sin^2(x^2)$. Která z následujících funkcí se rovná derivaci funkce f?

A $4x \sin(x^2)$

B Derivace funkce f neexistuje.

C $2\cos^2(2x)$

***D** $4x \sin(x^2) \cos(x^2)$

E $4x \cos^2(x^2)$

Teorie grafů

---

17 Kolik hran má úplný neorientovaný bipartitní graf $K_{m,n}$?

A $m + n$

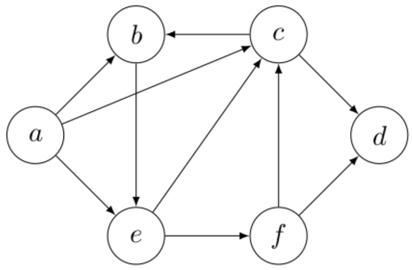
B $\binom{m}{2} + \binom{n}{2}$

C $\frac{m \cdot n}{2}$

***D** $m \cdot n$

E $\frac{m+n}{2}$

18 Uvažme následující orientovaný graf:



Rozhodněte, která z následujících posloupností vrcholů *může vzniknout* jako pořadí objevení vrcholů při prohledání grafu *do šířky* z vrcholu a. (Nepředpokládáme žádné uspořádání na vrcholech. Pořadí, ve kterém algoritmus prohledání do šířky objevuje nové vrcholy, tedy není jednoznačně dáno.)

A a, b, c, d, e, f

B a, b, e, f, d, c

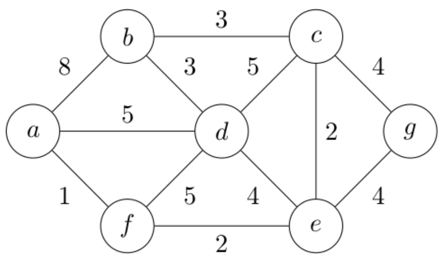
C a, f, c, e, b, d

D a, b, e, f, c, d

***E** a, c, e, b, d, f

---

19 Uvažme následující hranově ohodnocený neorientovaný graf G:



Který z vrcholů grafu G má největší vzdálenost od vrcholu a? (Vzdáleností dvou vrcholů rozumíme délku libovolné nejkratší cesty mezi těmito vrcholy.)

A d

B e

***C** b

D g

E c

---

20 Kolik nejméně listů může mít *binární strom* o 2018 vrcholech?

A 2^{2018}

B 2018

C 1009

D 2017

***E** 1

---

21 Nechť G je libovolný hranově ohodnocený neorientovaný graf. Označme jako G^{+2} graf, který vznikne z grafu G tak, že váhu každé hrany zvětšíme o 2. Které z následujících tvrzení obecně platí pro libovolné vrcholy u, v grafu G? (Zde délkou cesty rozumíme součet ohodnocení všech hran dané cesty.)

A Pokud dvě cesty mezi vrcholy u a v v grafu G mají stejnou délku, mají také stejnou délku v grafu G^{+2}.

B Každá nejkratší cesta mezi vrcholy u a v v grafu G je také nejkratší cestou mezi týmiž vrcholy v grafu G^{+2}.

C Délka nejkratší cesty mezi vrcholy u a v v grafu G^{+2} je o dva větší než délka nejkratší cesty mezi týmiž vrcholy v grafu G.

***D** Žádná z ostatních možností není správná.

E Délka nejkratší cesty mezi vrcholy u a v v grafu G^{+2} je dvojnásobkem délky nejkratší cesty mezi týmiž vrcholy v grafu G.

Pravděpodobnost

22 Postupně dvakrát hodíme mincí, na které padá panna i orel se stejnou pravděpodobností. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že ve druhém hodu padne panna, za podmínky, že v prvním hodu padla panna?

A $\frac{1}{3}$

B 0

***C** $\frac{1}{2}$

D $\frac{1}{4}$

E $\frac{3}{4}$

---

23 Uvažme náhodné veličiny X a Y, pro které platí

$P(X = 0) = \frac{2}{3}$, $P(X = 2) = \frac{1}{3}$,

$P(Y = 1) = \frac{1}{2}$, $P(Y = 2) = \frac{1}{2}$.

Určete korelaci náhodných veličin X a Y.

A $\sqrt{\frac{3}{2}}$

B 1

C -1

***D** 0

E $\frac{3}{\sqrt{2}}$

---

24 Aleš, Jana a Vladimír mají 10 identických kuliček. Kolika různými způsoby je mezi sebe můžou rozdělit?

A 72
B 24
C 56
D 48
***E** 66

---

25 Anička s Bětkou chtějí jít ven. Víme, že:

- Anička půjde ven za podmínky, že půjde ven i Bětka, s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ a
- pravděpodobnost, že půjdou ven obě dívky, je $\frac{1}{4}$.

Určete pravděpodobnost, že půjde ven Bětka.

A $\frac{1}{12}$

***B** $\frac{3}{4}$

C $\frac{1}{3}$

D $\frac{1}{4}$

E Z uvedených hodnot není možné požadovanou pravděpodobnost jednoznačně určit.

Tato strana je prázdná.