Modulární systém dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků JmK

v přírodních vědách a informatice

CZ.1.07/1.3.10/02.0024

Co umí excel?

Cvičebnice příkladů pro učitele

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tabulkový kalkulátor představuje překvapivě silný nástroj pro řešení různorodých problémů. Tato cvičebnice několik vybraných aplikací z oblati matematiky, šifrování ale i běžného života.

1. Číselné řady

Zadání: Odhalte princip následujících posloupností a vytvořte pravidlo funkce v Excelu. Vypište prvních 20 čísel zadaných posloupností.

Jednoduché řady

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
2. 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
3. 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, ...
4. 1, 2, 4, 7, 11, 16, ...

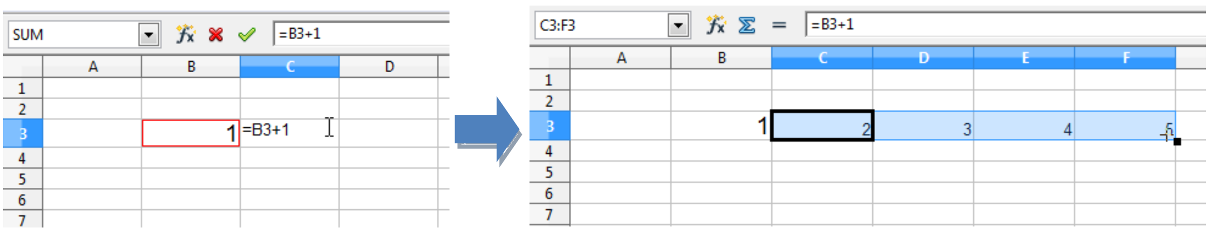
Polynomiální řady

1. Kvadratický: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, ...
2. Kvadratický dva: 2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, 128, 162, 200, 242, 288, 338, ...
3. Kubický: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728, 2197, ...

Obtížnější řady

1. Fibonaciho řada: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...
2. Mocniny dvojky: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, ...
3. Mocniny trojky: 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, ...
4. Faktoriál: 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, ...

Komentář: většinu řad je možné spočítat ze znalosti předcházejícího členů. Vzorec pro další člen zapíšeme do vstupní řádky a buňku roztáhneme. Praktická ukázka konstrukce jednoduché řady je na obrázku.



2. Colatzův problém

Speciální řadou je tzv. Colatzův problém, který trápí matematiky již 80 let. Jeho řadu získáme aplikací následujícího postupu:

1. vezmi přirozené číslo, pokud je sudé, vyděl jej dvěma, pokud je liché, vynásob ho třemi a přičti jedničku,
2. tento postup opakuj, dokud se nedostaneš na číslo 1.

Zadání: pro malá čísla postup rychle skončí zpět u jedničky. Vypište posloupnost pro tato startovní čísla:

1. **1**, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1
2. **7**, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
3. **27**, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, …

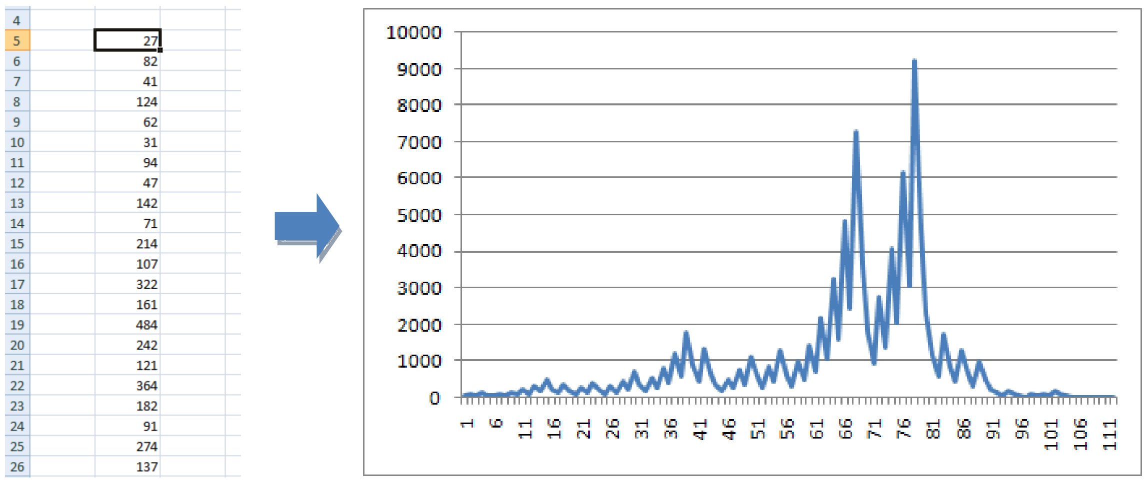
Mezi další úkoly může patřit:

- Vypište prvních 100 čísel Colatzovy posloupnosti pro vybrané číslo.
- Zakreslete je do grafu (viz obrázek).

Komentář: přestože postup pro výpočet jednotlivých členů této řady je velice jednoduchý, dostáváme různě velké posloupnosti pro různá iniciální čísla. Pro test sudosti použijeme funkci IF a matematickou funkci MOD, která testuje zbytek po dělení libovolným číslem.

- **IF(podmínka; příkaz1; příkaz2)**: je-li splněna podmínka, vykoná příkaz1, jinak příkaz2
- **MOD (číslo; dělitel):** vrací zbytek po dělení čísla dělitelem

Problém je zajímavý mimo jiné i proto, že matematici dodnes nevědí, zda se Colatzova posloupnost vrací do jedničky pro všechna myslitelná přirozená čísla. Problém byl formulován v roce 1937 a pro doposud testovaná čísla hypotéza platí, není však jasné, zda podmínka bude platit pro všechna čísla.



3. PASCALŮV TROJÚHELNÍK

Pascalův trojúhelník je zajímavý matematický objekt, který v sobě skrývá řadu zajímavých vlastností. Například:

- Všechna kombinační čísla pro číslo n (kde n je řádek Pascalova trojúhelníku)
- Koeficienty pro umocnění dvojčlenu $(a+b)^n$ (kde n určuje řádek Pascalova trojúhelníku)
- Gaussovu křivku (viz níže)
- Sierpienského fraktál (viz další kapitola)

Na jeho konstrukci nám navíc vystačí držet se pouze jednoduchého pravidla sečtení nejbližších dvou buněk předchozího řádku.

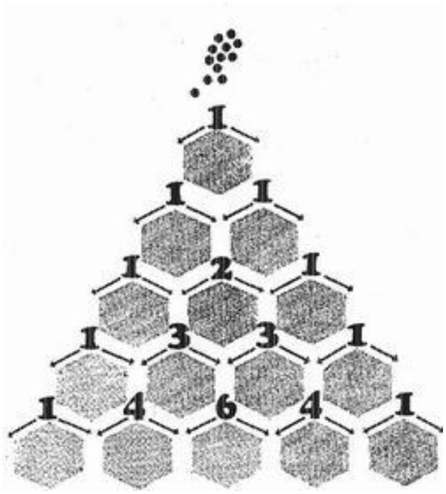
Zadání:

- Vypište prvních 20 řádků Pascalova trojúhelníku.
- Ke všem řádkům Pascalova trojúhelníku doplňte jejich součet (mocniny čísla 2).
- Vykreslete graf dvacátého řádku Pascalova trojúhelníku (Gaussova křivka).

Komentář: pro vypsání Pascalova trojúhelníku jednoduše sečteme políčko nad buňkou a políčko vlevo nad buňkou. Tento vzorec po řádcích aplikujeme do trojúhelníkového útvaru. Pro součet jednotlivých řádků použijeme funkci SUM, jejíž parametry jsou koncové buňky, mezi kterými čísla sčítáme.

- **SUM(Buňka1:Buňka2):** sečte všechny buňky mezi Buňka1 a Buňka2

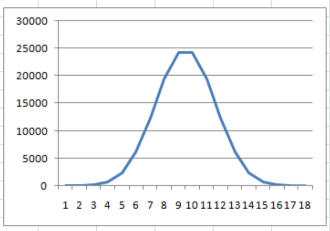
Na Pascalův trojúhelník se dá také dívat také očima statistiky. Představme si trojúhelník jako mechanismus, do kterého sypeme kuličky. Každé políčko představuje jednu výhybku, na které se kulička s pravděpodobností 50:50 vydá nalevo, či napravo.



Čísla v trojúhelníku pak určují počet cest, které na políčko vedou z jeho vrcholu – odráží tedy pravděpodobnost, že kulička skončí právě na tomto políčku. Čím hlouběji se v Pascalově trojúhelníku zanořujeme, tím blíže se rozložení cest do políček řádku blíží normálnímu rozložení (známé též jako Gaussovo).

C20 =B19+C19

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	**Pascalův trojúhelník**																		
2	**sum**																		
3	1		1																
4	2		1	1															
5	4		1	2	1														
6	8		1	3	3	1													
7	16		1	4	6	4	1												
8	32		1	5	10	10	5	1											
9	64		1	6	15	20	15	6	1										
10	128		1	7	21	35	35	21	7	1									
11	256		1	8	28	56	70	56	28	8	1								
12	512		1	9	36	84	126	126	84	36	9	1							
13	1024		1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1						
14	2048		1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1					
15	4096		1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1				
16	8192		1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1			
17	16384		1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1		
18	32768		1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1	
19	65536		1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1
20	131072		1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17



4. Sierpienského fraktál

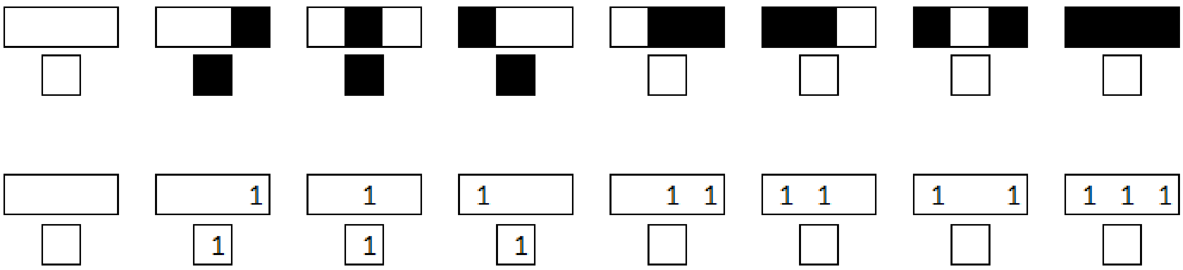
Pascalův trojúhelník v sobě ukrývá také Sierpienského fraktál. Co to znamená? Fraktál je sobě podobný útvar, tedy útvar, který se sám v sobě dále opakuje (až do nekonečna). Fraktály jsou navíc zpravidla velice jednoduše popsatelné. Ten Sierpienského je popsán takto:

1. Vezmi plný rovnoramenný trojúhelník
2. Rozděl trojúhelník na 4 menší rovnoramenné trojúhelníky
3. Prostřední z nich vyřízni
4. Na zbylé tři aplikuj znovu uvedenou proceduru

My si ukážeme 2 možné metody jak fraktál vykreslit –pomocí Pascalova trojúhelníku a pomocí tzv. buněčného automatu.

Zadání:

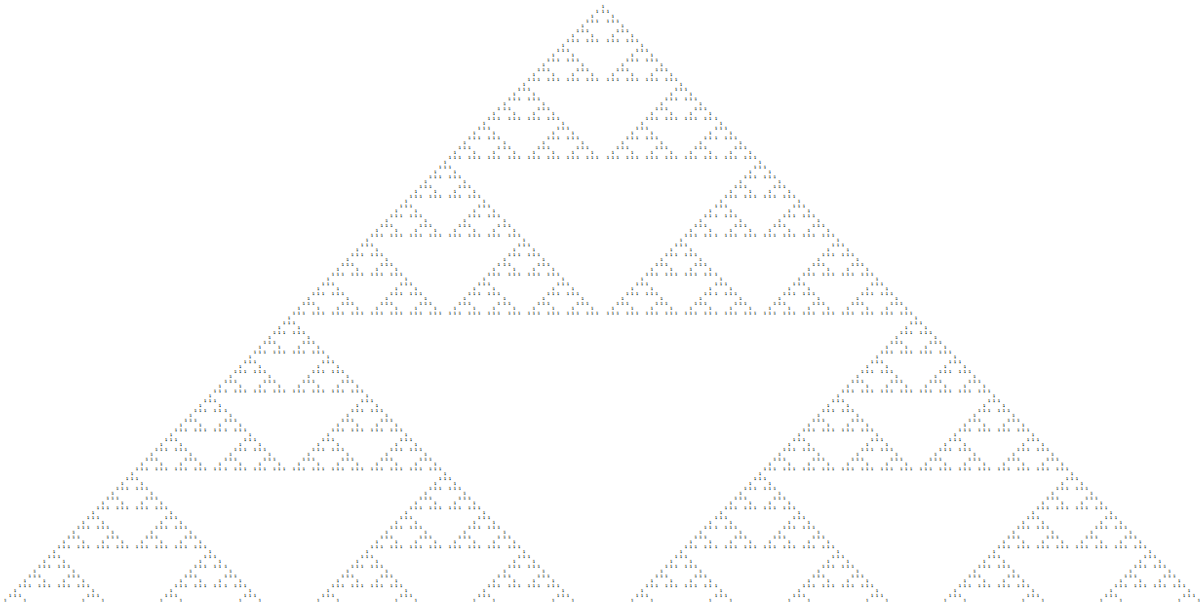
- Vykreslete Sierpienského fraktál pomocí vypsání lichých čísel Pascalova trojúhelníku.
- Vykreslete Sierpienského fraktál pomocí buněčného automatu splňujícího grafické podmínky zakreslené na obrázku.



Komentář: U prvního příkladu stačí testovat, zda je dané číslo Pascalova trojúhelníku liché. Pakliže je, vypíšeme symbol 1, v opačném případě vypíšeme prázdný řetězec. Ke zjištění lichosti využijeme funkci MOD, k sepsání podmínky pak zavoláme příkaz IF. Zobrazený fraktál však není příliš podrobný (obsahuje málo políček). Proto vyzkoušíme druhý, buněčný přístup.

Buněčný automat popisuje pravidla pro chování jednotlivých buněk systému. V našem případě se budou buňky jednotlivých řádků dívat na tři sousedy v předcházejícím řádku. Podle jejich obarvení (počtu symbolů 1) se rozhodnou, zda svou hodnotu změní na 1, anebo prázdný řetězec. Pravidla pro vykreslení naleznete na obrázku.

K sestrojení funkce postačuje sečíst tři předchozí políčka a podle výsledku doplnit do buňky 1 nebo prázdný řetězec. K tomu využijeme funkce SUM a příkaz IF. Při aplikaci automatu na mřížku 100x100 dostaneme výsek hledaného fraktálu.



5. SUBSTITUČNÍ ŠIFRA

Na světě existuje celá řada metod, jak zašifrovat nějaký text. My si ukážeme několik nejzákladnějších způsobů využívajících posunů písmen v abecedě. První šifru, kterou si představíme je tzv. Caesarova šifra. Její princip spočívá v posunu všech písmen o 3 znaky ve směru abecedy (text „ahoj“ se tedy zašifruje jako „dkrm“).

Zpráva	A	H	O	J	J	A	K	S	E	M	A	S	J	A	S	E	M	A	M	D	O	B	R	E
Caesar	D	K	R	M	M	D	N	W	H	P	D	V	M	D	V	H	P	D	P	G	R	E	U	H

Zadání:

- Pomocí Caesarovy šifry zašifrujte zadaný text zprávy: D N E S J E H E Z K Y D E N
- Pomocí Caesarovy šifry dekódujte zprávu:
  S R N O D G M H X N U B W Y H V N R O Q L M L G H O Q H

Komentář: Caesarova šifra využívá posunu o 3 znaky. Můžeme si však představit, že zprávu posuneme o libovolný počet znaků. Při šifrování se tradičně používá abecedy o 26 znacích. Proto můžeme znaky posunout o 1-25 různých pozic. K posunutí znaků využijeme jednoduchý vzorec.

- **C = A+B mod 26**

Kde A reprezentuje písmeno zprávy a B reprezentuje číselný posun a určuje zbytek po dělení 26 –tedy zašifrované písmeno.

K aplikaci vzorce potřebujeme převést jednotlivá písmena na čísla. K tomu slouží funkce CODE, která vrátí ke každému znaku jeho číselnou podobu. Opačnou funkcí je funkce CHAR, která vrací k danému číslu odpovídající znak. Pro zjištění zbytku po dělení využijeme funkce MOD.

- **CHAR(číslo):** vrací znak se zadaným číslem
- **CODE(znak):** vrací číselný kód zadaného znaku

- **MOD(A,B):** vrací zbytek po dělení čísla A číslem B

Poznámka: Znaky v abecedě v počítači zpravidla nejsou zarovnány k nule. Proto je třeba nejprve od šifrovaného znaku odečíst CODE(„A“) následně jej zašifrovat (posunout) a opět přičíst CODE(„A“).

Zadání 2:

- Pomocí posunu písmen zašifrujte zprávu s posunem o 5 znaků
  H A D E J T E C O J S E M M E L D N E S K O B E D U
- Dekódujte zprávu s posunem o 10 znaků:
  F O V U K M O B X K U Y M U K C V K Z B O C M O C D E
- Dekódujte zprávu s neznámým posunem:
  E V A M P J J Z Y F I R A V J E V Q B R

Komentář 2: jedná se o aplikaci stále stejného algoritmu. Jediná zajímavost přichází v posledním úkolu, kdy je možné využít roztažení k zobrazení všech 26 kombinací a vizuálně pak člověk snadno nalezne odpovídající řádek, který dává smysl.

13	**Tajúplná zpráva**																				
14			**N**	**E**	**J**	**V**	**Y**	**S**	**S**	**I**	**H**	**O**	**R**	**A**	**J**	**E**	**S**	**N**	**E**	**Z**	**K**	**A**
15			E	V	A	M	P	J	J	Z	Y	F	I	R	A	V	J	E	V	Q	B	R
16		posun																				
17		-1	D	U	Z	L	O	I	I	Y	X	E	H	Q	Z	U	I	D	U	P	A	Q
18		-2	C	T	Y	K	N	H	H	X	W	D	G	P	Y	T	H	C	T	O	Z	P
19		-3	B	S	X	J	M	G	G	W	V	C	F	O	X	S	G	B	S	N	Y	O
20		-4	A	R	W	I	L	F	F	V	U	B	E	N	W	R	F	A	R	M	X	N
21		-5	Z	Q	V	H	K	E	E	U	T	A	D	M	V	Q	E	Z	Q	L	W	M
22		-6	Y	P	U	G	J	D	D	T	S	Z	C	L	U	P	D	Y	P	K	V	L
23		-7	X	O	T	F	I	C	C	S	R	Y	B	K	T	O	C	X	O	J	U	K
24		-8	W	N	S	E	H	B	B	R	Q	X	A	J	S	N	B	W	N	I	T	J
25		-9	V	M	R	D	G	A	A	Q	P	W	Z	I	R	M	A	V	M	H	S	I
26		-10	U	L	Q	C	F	Z	Z	P	O	V	Y	H	Q	L	Z	U	L	G	R	H
27		-11	T	K	P	B	E	Y	Y	O	N	U	X	G	P	K	Y	T	K	F	Q	G
28		-12	S	J	O	A	D	X	X	N	M	T	W	F	O	J	X	S	J	E	P	F
29		-13	R	I	N	Z	C	W	W	M	L	S	V	E	N	I	W	R	I	D	O	E
30		-14	Q	H	M	Y	B	V	V	L	K	R	U	D	M	H	V	Q	H	C	N	D
31		-15	P	G	L	X	A	U	U	K	J	Q	T	C	L	G	U	P	G	B	M	C
32		-16	O	F	K	W	Z	T	T	J	I	P	S	B	K	F	T	O	F	A	L	B
33		-17	**N**	**E**	**J**	**V**	**Y**	**S**	**S**	**I**	**H**	**O**	**R**	**A**	**J**	**E**	**S**	**N**	**E**	**Z**	**K**	**A**
34		-18	M	D	I	U	X	R	R	H	G	N	Q	Z	I	D	R	M	D	Y	J	Z
35		-19	L	C	H	T	W	Q	Q	G	F	M	P	Y	H	C	Q	L	C	X	I	Y
36		-20	K	B	G	S	V	P	P	F	E	L	O	X	G	B	P	K	B	W	H	X
37																						

6. ŠIFROVÁNÍ S HESLEM

Jiná oblíbená metoda pro šifrování zprávy je využití hesla. Princip je podobný jako u substituční šifry, tentokrát však budeme šifrovat zprávu pomocí posunu dle znaků daného hesla. To opakovaně přiložíme pod celý text a výsledná zpráva bude tvořena pomocí vzorce:

- **C = A + B mod 26**

Kde A prezentuje písmeno původní zprávy, B prezentuje písmeno hesla, které leží pod písmenem A. Zbytek po dělení 26 nám dává nové zašifrované písmeno C. Výsledek zašifrování vidíme na obrázku.

Zpráva	A	H	O	J	J	A	K	S	E	M	A	S	J	A	S	E	M	A	M	D	O	B	R	E
Heslo	H	E	S	L	O	H	E	S	L	O	H	E	S	L	O	H	E	S	L	O	H	E	S	L
Šifra	H	L	G	U	X	H	O	L	P	A	H	W	B	L	G	L	Q	S	X	R	V	F	J	P

Zadání:

- Zašifrujte pomocí hesla „JACK“ zprávu: K A Z D Y R A N O N A P I A N O H R A J E J A C K
- Rozluštěte zprávu pomocí hesla B O U R K A:
  P P Q A V F P S C D L T K O V L X F P X H W D J E T

Komentář: princip je podobný jako u předcházejícího příkladu. Pouze je třeba zároveň vyčítat hodnoty hesla pod daným písmenem. K tomu opět použijeme funkci CODE a CHAR a také funkci MOD.

7. FREKVENČNÍ ANALÝZA

Zatím jsme se zabývali posunem všech znaků abecedy o zadaný počet symbolů. Trochu mazanější šifra však posune každý znak o jiný počet znaků. A se potom zobrazí například na B, avšak C se zobrazí například na X. Rozluštění takovéto šifry bez znalosti posunů jednotlivých písmen je opravdu náročné (26! kombinací). Může nám však pomoci metoda, která je založena na statistickém výskytu písmen v Českém jazyce – frekvenční analýza.

Frekvenční analýza je metoda, jak odhalit šifru na základě opakování písmen v běžném textu. Některá písmena se totiž vyskytují v jazyce mnohem častěji než jiná. A právě relativní četnosti výskytu si můžeme spočítat pomocí Excelu.

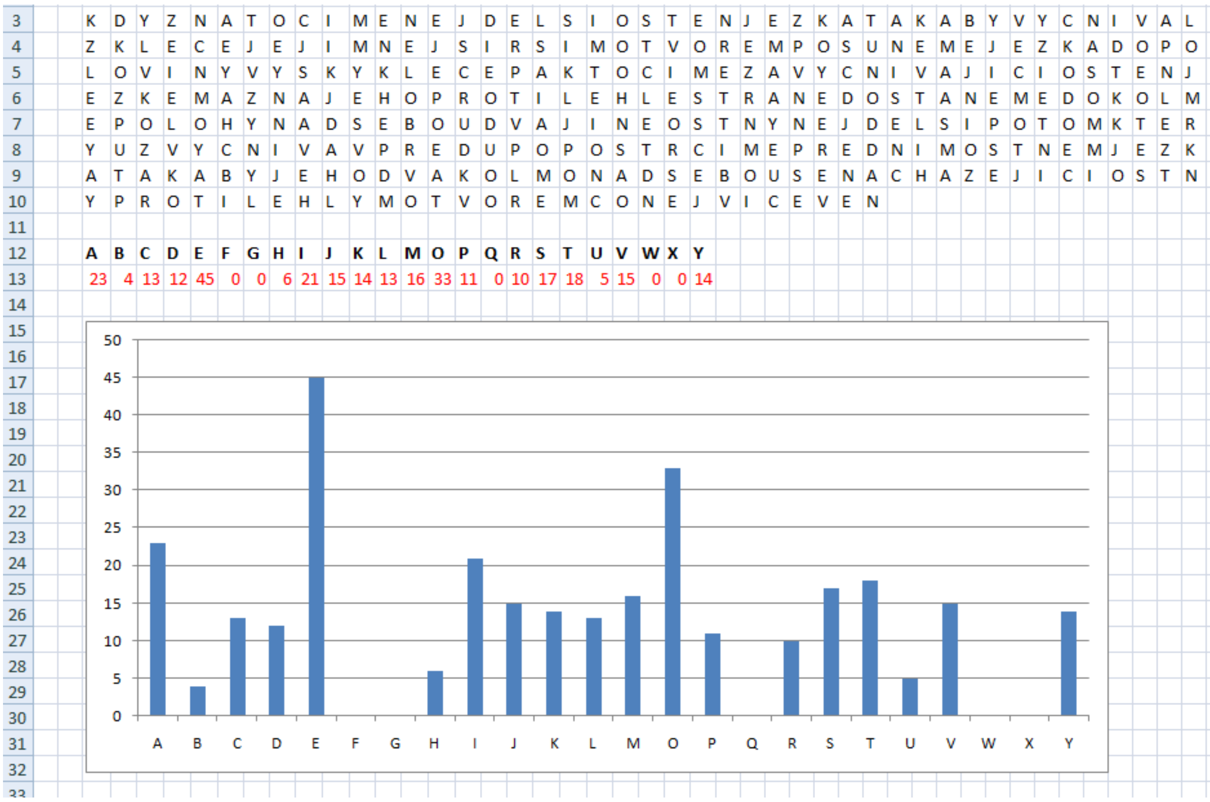
Zadání:

- Proveďte frekvenční analýzu zadaného textu
- Vytvořte sloupcový sloupcový graf frekvenční analýzy
- Srovnejte frekvenční analýzu se zadaným textem s libovolným jiným textem

Komentář: ke spočtení výskytů jednotlivých znaků využijeme funkce COUNTIF, která testuje podmínku na zadaném rozsahu buněk. Při roztažení podmínky bychom rádi, aby vybraný text zprávy zůstal zafixován. K tomu použijeme absolutní pozicování.

- **COUNTIF(Buňka1:Buňka2;PODMÍNKA):** spočítá počet splnění dané podmínky na rozsahu buněk Buňka1 az Buňka2.
- **$A$1:$Z$4**: pomocí symbolu **$** označíme danou oblast A1 – Z4 absolutně. Při „roztažení“ podmínky na další symboly nedojde k posunu vybrané oblasti.

K následnému zobrazení frekvencí písmen pak použijeme standardní sloupcový graf.



8. INFLACE A VKLADY

Peníze díky inflaci průběžně ztrácí na hodnotě. Ale o kolik? Je to hodně nebo málo? Má smysl se tím trápit? Ukážeme si, jak nám na tyto otázky pomůže odpovědět Excel.

Zadání:

- V roce 2000 jste si dali 10 000,- pod polštář. Jaká bude hodnota těchto peněz nyní?
- Jaká bude hodnota peněz v případě, že jste dali peníze na bankovní účet s úrokem 1%?
- Peníze jste investovali do pozemku, který se úročí o 6% ročně. Jaká bude nyní jejich hodnota?

Komentář: při polštářovém ukrytí 10 000,- se hodnota peněz snižuje s inflací. Pro výpočet jednotlivých roků použijeme vzorec, který roztáhneme přes všechny sledované roky.

- **H+1 = (H / (H * (100+INFLACE – U)*0.01)) * H**

Kde H je hodnota peněz pro daný rok, H+1 je hodnota peněz v dalším roce a U je velikost zúročení (0%, 1%, 6%). Vývoj hodnoty peněz vidíme na obrázku.

3		Rok	Inflace		Hodnota peněz	Úrok 1%	Úrok 6%
4	Start				10000	10000	10000
5		2000	3,9		9625	9718	10215
6		2001	4,7		9193	9371	10350
7		2002	1,8		9030	9297	10804
8		2003	0,1		9021	9381	11481
9		2004	2,8		8775	9215	11861
10		2005	1,9		8611	9133	12368
11		2006	2,5		8401	8998	12817
12		2007	2,8		8172	8839	13241
13		2008	6,3		7688	8394	13201
14		2009	1		7612	8394	13896
15		2010	1,5		7500	8352	14551
16		2011	2,2		7339	8253	15126

Zadání 2:

- V roce 2000 jste si začali ukládat každý rok 1000,- pod polštář. Jaká je hodnota těchto peněz nyní?
- V roce 2000 jste si začali ukládat každý rok 1000,- na bankovní konto s úrokem 3%. Jaká je hodnota těchto peněz nyní?

Komentář: příklady vedou na podobnou myšlenku jako předcházející úloha. Jediný rozdíl je v počáteční částce 0,- a pravidelném přírůstku 1000,-.

- $H+1 = ((H+V) / ((H+V) * (100+INFLACE - U)*0.01)) * (H+V)$

Kde H je hodnota peněz pro daný rok, H+1 je hodnota peněz v dalším roce, U je velikost zúročení (0%, 3%) a V je výše vkladu (1000,-). Příklady je možné doplnit i diskusí o výhodnosti různých typů investic (banky, nemovitosti atp.).

3		Rok	Inflace		Vklad pod polštář	Vklad, 3% úrok	Vloženo
4	Start				0	0	
5		2000	3,9		962	991	1000
6		2001	4,7		1874	1958	2000
7		2002	1,8		2823	2994	3000
8		2003	0,1		3819	4113	4000
9		2004	2,8		4688	5123	5000
10		2005	1,9		5582	6191	6000
11		2006	2,5		6421	7227	7000
12		2007	2,8		7219	8243	8000
13		2008	6,3		7732	8948	9000
14		2009	1		8646	10151	10000
15		2010	1,5		9503	11321	11000
16		2011	2,2		10277	12420	12000