

Modulární systém dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků JmK

v přírodních vědách a informatice

CZ.1.07/1.3.10/02.0024

Teorie grafů

Poznámky pro učitele



esf evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Teorie grafů – poznámky pro učitele

Tato sbírka poskytne náměty aktivity, které studentům prezentují formou hádanek základy teorie grafů. Studentům předložíme hádanky či problémy, které se pokusí vyřešit. Následně ukážeme řešení a ilustrujeme, jak nám při něm mohou pomoci grafy.

Doporučený průběh cvičení

Hádanky ve sbírce mají vzestupnou obtížnost. Doporučený průběh cvičení:

1. Zadání hádanky
2. Prezentace řešení studentů
3. Rozbor řešení s využitím grafů

Seznam úloh a představených konceptů

- Demočkologie (eulerovská cesta)
 - Domečky
 - Procházka po platónských tělesech
- Bludiště (reprezentace, komponenta grafu)
 - Trojrozměrné bludiště
 - Bludiště s dveřmi
 - Neprůchodné bludiště
 - Neprůchodné bludiště 2
- Stavové prostory (stavový prostor, průchod do šířky, do hloubky)
 - Vlk, koza zelí
 - Kanibalové a misionáři
 - Žárliví muži
 - Velká výprava
 - Zranění muži
- Hledání algoritmu (reprezentace problému v PC, stavový prostor, průchod do šířky, fronta)
 - Bludiště
 - Sokoban

Domečkologie

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

Náročnost: vyřešit: 5 – 10 minut, najít princip: 10 – 15 minut

Zaměření: základní pojmy teorie grafů, eulerovská cesta

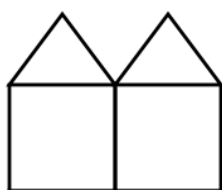
Materiál: okopírované zadání

Průběh:

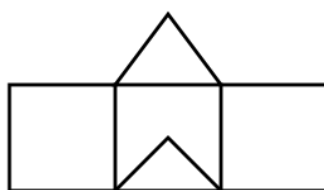
Studentům rozdáme zadání a vysvětlíme jej: zkuste nakreslit domečky na obrázku. Které z nich lze nakreslit jedním tahem? Které z nich lze nakreslit uzavřeným tahem (skončíme tam, kde jsme začali)?



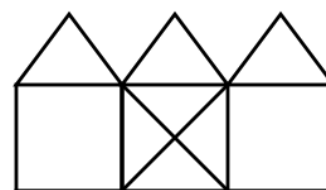
Má řeš.



Nemá řeš.



Má řeš.



Má řeš.

Řešení:

Řešení vede na tzv. poštákov problém. Tedy jak má projít pošťák všemi uličkami (hranami), aby roznesl poštu, ale neprocházel žádnou dvakrát. Obecné pravidlo, které musí platit, aby měl graf poštákovu cestu zní: všechny vrcholy v grafu mají sudý stupeň, anebo v grafu existují právě dva vrcholy s lichým stupněm. Stupeň vrcholu je počet hran, která z vrcholu vedou. Jak takové řešení nalézt?

Začneme ve vrcholu lichého stupně (pokud takový není, začneme v libovolném vrcholu) a děláme tah libovolným způsobem. Jakmile se zasekneme (tah již nelze dále prodloužit), došli jsme do druhého vrcholu s lichým stupněm. Pokud existují doposud nenavštívené hrany, vybereme si libovolný vrchol, ze kterého vede nenavštívená hrana, a z něj začneme další "vnořený" tah. Jelikož tah nemůže nikde skončit (oba liché vrcholy již jsme „vyčerpali“), tah se nám po čase vrátí do vrcholu, ze kterého jsme začali. Tedy vnořený tah můžeme jednoduše napojit na původní tah. Takto postupujeme dokud existují nenavštívené hrany.

Pošťák

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

Náročnost: vyřešit: 3-5 minut

Zaměření: základní pojmy teorie grafů, eulerovská cesta

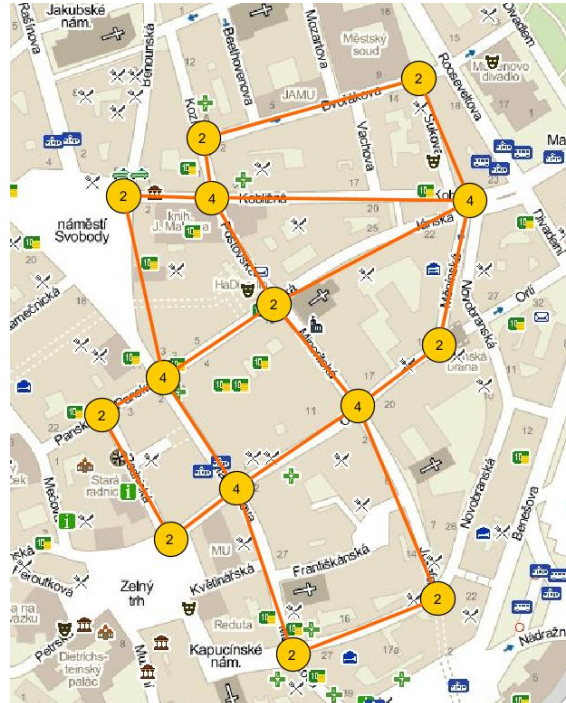
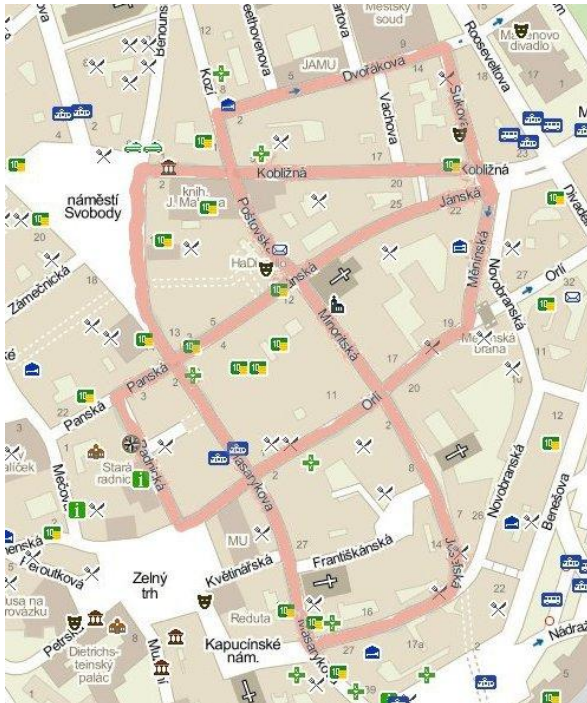
Materiál: okopírované zadání

Průběh:

Studentům rozdáme zadání a přečteme legendu: pošťák při roznosu pošty obchází v městské části Brno-střed pravidelnou trasu. Je možné ji projít trasu z ulice Poštovská tak, aby každou ulicí šel pošťák právě jednou? Zvýrazněné jsou ulice, které pošťák při obchůzce musí navštívit.

Řešení:

Nejprve si úlohu překreslíme do formátu grafu. Poté ověříme stejně jako u domečkologie, zda mají všechny vrcholy sudý stupeň. Protože skutečně všechny vrcholy sudý stupeň mají, musí v grafu existovat cesta, která navštíví všechny hrany a vrátí se do výchozího vrcholu.



Procházka po Platónských tělesech

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

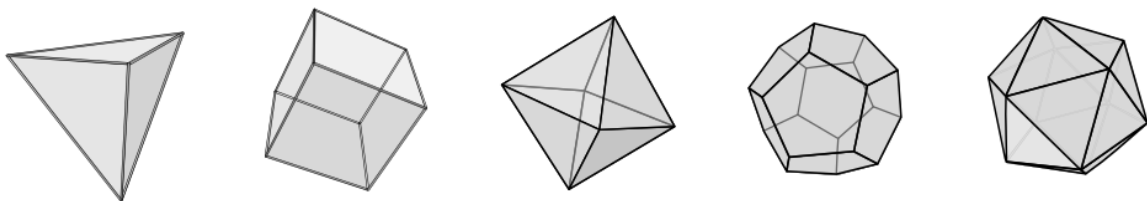
Náročnost: vyřešit: 15 – 20 minut

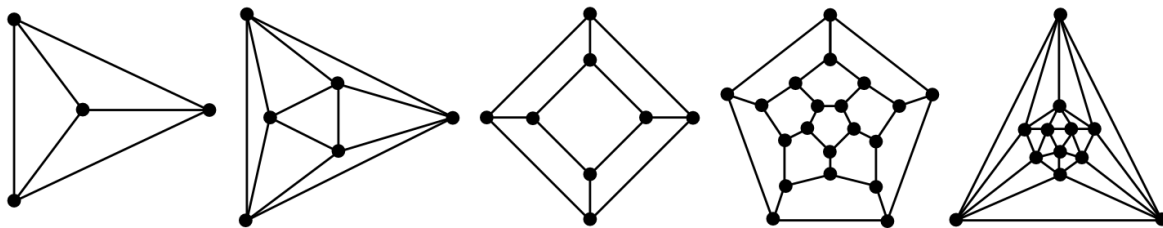
Zaměření: základní pojmy teorie grafů, eulerovská cesta

Materiál: okopírované zadání

Průběh:

Studentům rozdáme zadání a přečteme jednoduchou legendu: mravenec se rozhodl udělat si výlet po všech pěti platónských tělesech (pravidelné mnohostěny). Při procházce chce navštívit všechny vrcholy, každý z nich právě jednou a chce vždy skončit svou cestu tam, kde začne. Cestuje pouze po hranách. Existuje taková cesta pro všechna platónská tělesa?





Všetchna tělesa mají řešení

Řešení:

Úloha je stejná jako v případě domečkologie. Hlavním trikem je překreslit si graf do plochy a v ní jej vyřešit.

Neprůchodné bludiště

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

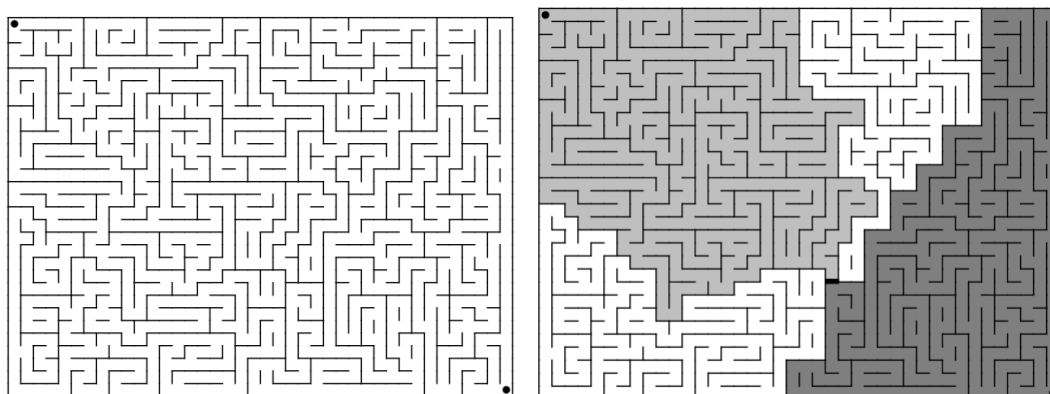
Náročnost: lehká, 5 - 10 minut

Zaměření: základní pojmy teorie grafů, komponenta souvislosti

Materiál: okopírované zadání

Průběh:

Studentům rozdáme namnožené zadání a vysvětlíme princip: rádi bychom našli spojnici mezi dvěma označenými místy. Taková cesta však bohužel neexistuje. Máme však k dispozici krompáč! Úkolem je tedy najít zeď, po jejímž prokopání bude možné spojit vyznačené body. Možné řešení je pouze jedno.



Řešení:

Hlavní trik této hádanky spočívá v nalezení souvislých části bludiště. Tedy těch, kam se dostaneme ze startu bez prokopání jediné zdi. Toho snadno docílíme pomocí funkce floodfill. Po vybarvení vidíme, že místo, kde stačí prokopat zeď pouze jednou je jen jedno.

Neprůchodné bludiště 2

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

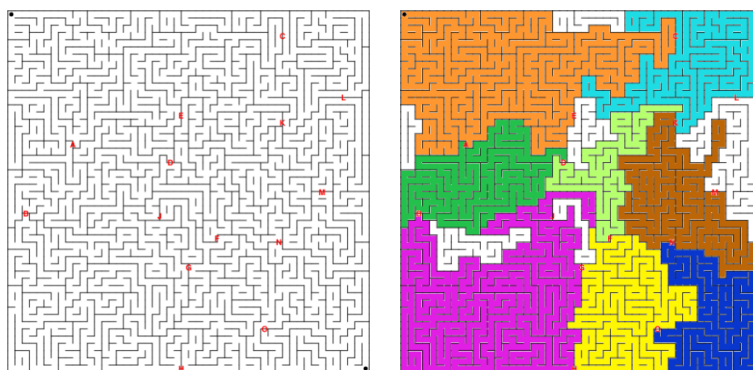
Náročnost: střední, 15 minut

Zaměření: základní pojmy teorie grafů, komponenta souvislosti

Materiál: okopírované zadání

Průběh:

Studentům rozdáme namnožené zadání a vysvětlíme princip: Rádi bychom našli spojnicí mezi dvěma označenými místy. Taková cesta bohužel neexistuje. Máme však k dispozici krompáč! Kopat však můžeme pouze v místech označených písmenem. Kudy vede cesta, která vyžaduje nejmenší počet kopání?



Řešení:

V prvním kroku si opět obarvíme souvislé části bludiště. Každou část pak můžeme reprezentovat jako vrchol a spojit ji s ostatními sousedy. V takto zjednodušeném grafu snadno nalezneme nejkratší cestu.

Trojrozměrné bludiště

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

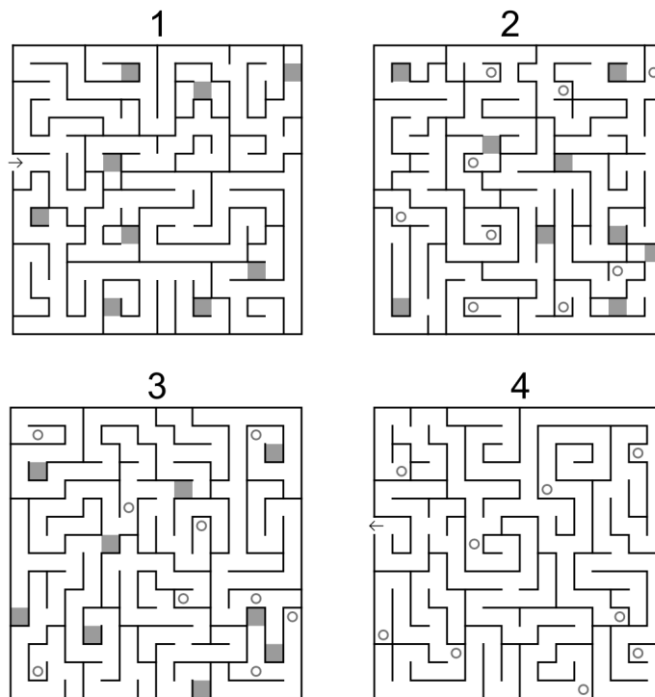
Náročnost: střední, 15 – 20 minut

Zaměření: základní pojmy teorie grafů, komponenta souvislosti

Materiál: okopírované zadání

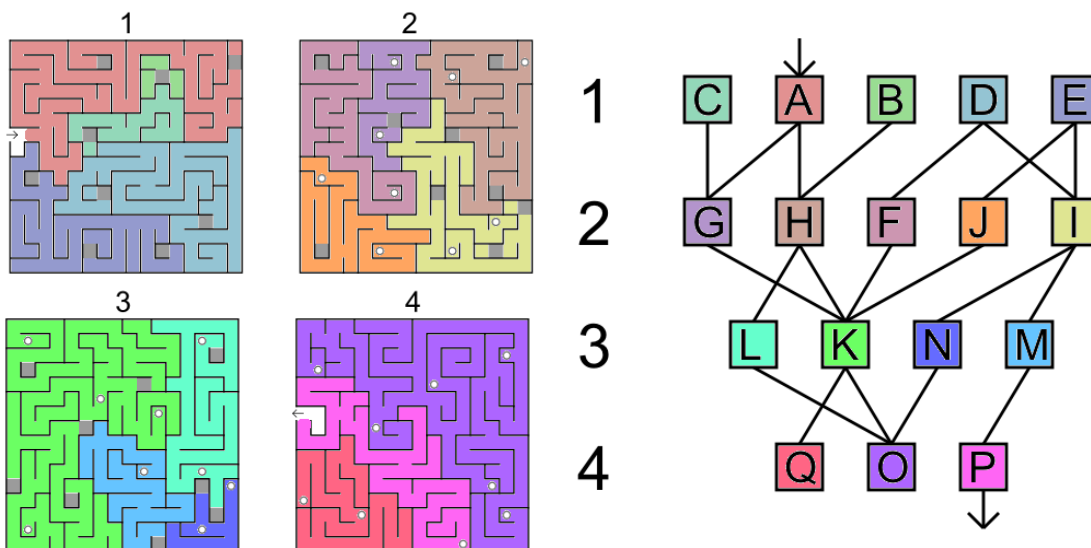
Průběh:

Rozdejte studentům namnožené bludiště a vysvětlíte princip: bludiště na obrázku je čtyřpatrové. V místech označených šedými čtverci jsou žebříky, které vedou o patro nahoru. Horní konce žebříků jsou označeny kolečkem. Po žebřících se smí chodit oběma směry. Kolikrát nejméně musíme lézt po žebříku, abychom se dostali z vchodu v prvním patře do východu ve čtvrtém patře?



Řešení:

V prvním kroku si vyznačíme souvislé části bludiště pomocí funkce floodfill. Tyto části budeme reprezentovat jako vrcholy v grafu. Spojíme ty vrcholy, mezi kterými vede v bludišti žebřík. V takovém grafu snadno nahlédneme nejkratší cestu do cíle (A-H-K-F-I-M-P).



Bludiště s dveřmi

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

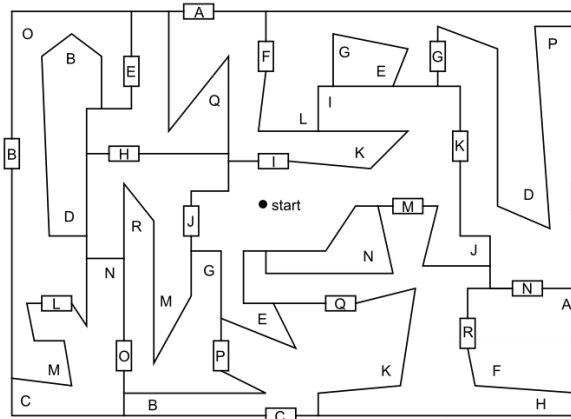
Náročnost: těžká, 20 minut

Zaměření: základní pojmy teorie grafů, reprezentace grafu, stavový prostor

Materiál: okopírované zadání

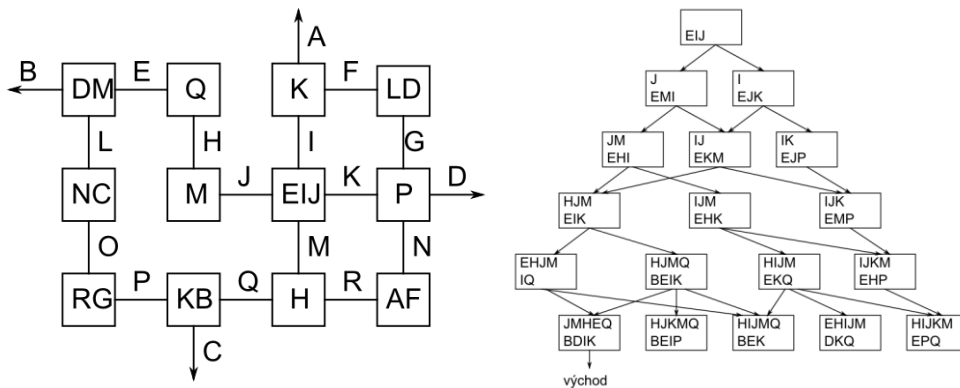
Průběh:

Studentům rozdáme zadání a vysvětlíme princip bludiště: bludiště obsahuje uzavřené dveře, představované obdélníčky. Volná písmena představují klíče. Na otevření dveří potřebujeme příslušný klíč, jakmile jednou dveře otevřete, už zůstanou pořád otevřeny. Úkolem je dostat z místa, kde je černá tečka, ven z bludiště. Najděte takovou cestu, při které je potřeba otevřít nejmenší možný počet dveří.



Řešení:

Úlohu si zjednodušíme překreslením do grafu. Do vrcholů zapíšeme klíče v příslušné místnosti, hrany označí dveře a potřebný klíč k otevření. Z obrázku jsou vynechány nepřístupné místnosti. Tento graf projdeme do šířky (druhý obrázek). Vrcholy reprezentují aktuální stav: horní řádek značí již otevřené dveře, spodní řádek značí dostupné klíče. V tomto grafu snadno najdeme nejkratší cestu k východu.



Vlk, koza, zelí

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

Náročnost: střední, 10 - 20 minut

Zaměření: stavový prostor, vhodná reprezentace, prohledávání do šířky

Materiál: okopírované zadání

Průběh:

Studentům přečteme zadání, případně nakreslíme na tabuli pomocí schématu: převozník chce převést přes řeku hlávku zelí, kozu a vlka. Do loďky se vejde pouze převozník a jeden spolucestující (hlávka zelí je opravdu velká). Nechá-li převozník na břehu samotnou kozu a zelí, koza zelí sežere.

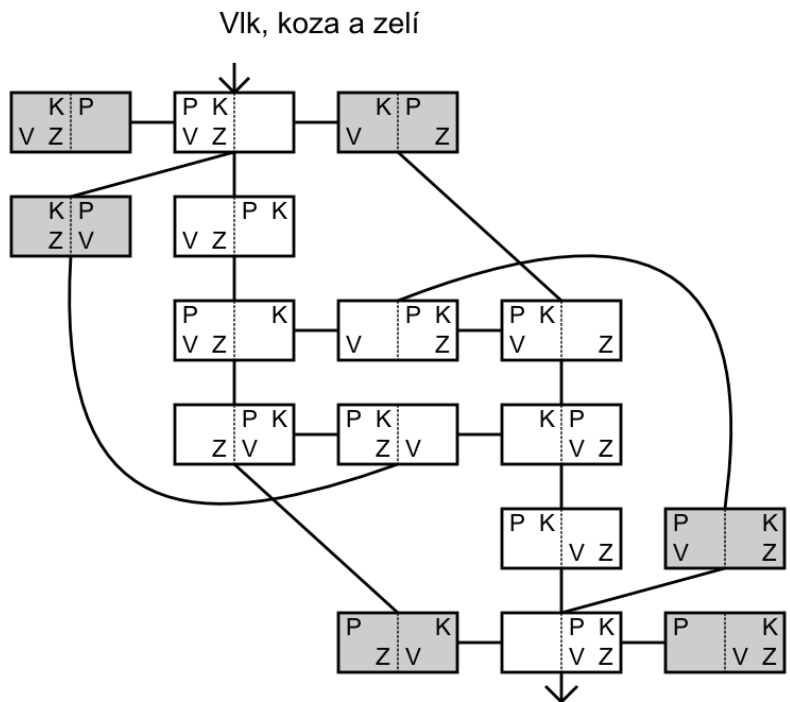
Nechá-li na břehu samotného vlka a kozu, vlk sežere kozu. Jak se může převozník dostat na druhý břeh i s celým nákladem?

Řešení:

Studenti budou řešit úlohu procházením možných kombinací. Na to můžeme navázat rozbořem všech řešení hry (viz obrázek). Každý vrchol reprezentuje jeden stav úlohy, dělicí čára řeku a čtyři písmena čtyři pasažéry. Celému grafu říkáme stavový prostor. Pro úplnost uvádíme také chybné tahy, které vedou k porušení pravidel (šedé vrcholy). Vidíme, že stavový prostor úlohy je poměrně malý, díky neuntuitivnosti některých tahů však může přesto být úloha náročná.

Na úlohe je možné navázat serií otázek týkajících se hledání řešení podobných hádanek za pomoci počítačového programu. Například:

- Jak stav úlohy zapsat v počítači?
- Jak procházet stavový prostor systematicky?
- Jak nám v tom pomůže fronta nebo zásobník?
- Jak poznat, že jsme úlohy vyřešili?



Kanibalové a misionáři

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

Náročnost: střední, 10 - 20 minut

Zaměření: stavový prostor, vhodná reprezentace, prohledávání do šířky

Materiál: okopírované zadání

Průběh:

Studentům přečteme zadání, případně nakreslíme na tabuli pomocí schématu: tři misionáři se vydali

na osvětovou misi a jako průvodce mají tři kanibaly. Potřebují překonat řeku, ovšem loďka uveze nejvýše dva lidi. Kanibalové zatím nejsou dostatečně poznamenáni misionářskou osvětou, takže pokud se kdykoli vyskytne na jednom místě více kanibalů než misionářů, budou misionáři snězeni. Jinak však kanibalové spolupracují a udělají, co jim misionáři řeknou. Jak se může celá skupina dostat na druhý břeh?

Problém můžeme dále zkomplikovat. Co když umí pádlovat pouze jeden z misionářů a jeden z kanibalů? Co když bude misionářů a kanibalů více než po třech? Je úloha řešitelná?

Řešení:

Hádanka vede stejně jako „vlk koza zelí“ k analýze stavového prostoru úlohy. Vhodné pro zamyšlení nad hledáním řešení pomocí počítačového programu.

Žárliví muži

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

Náročnost: střední, 10 - 20 minut

Zaměření: stavový prostor, vhodná reprezentace, prohledávání do šířky

Materiál: okopírované zadání

Průběh:

Studentům přečteme zadání, případně nakreslíme na tabuli pomocí schématu: tři manželské páry vyrazily na výlet. Opět potřebují překonat řeku pomocí loďky, do které se vejdou nejvýše dva lidé. Problém tentokrát tkví v tom, že všichni muži jsou děsně žárliví. Muž nikdy nechce nechat svou ženu ve společnosti dalšího muže bez svého dozoru (a to ani kdyby u toho byli jiní lidé). Co když bude více párů než tři? Je úloha řešitelná? Pomůže, když je uprostřed řeky ostrov?

Řešení:

Hádanka vede stejně jako „vlk koza zelí“ k analýze stavového prostoru úlohy. Vhodné pro zamyšlení nad hledáním řešení pomocí počítačového programu.

Velká výprava

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

Náročnost: střední, 10 - 20 minut

Zaměření: stavový prostor, vhodná reprezentace, prohledávání do šířky

Materiál: okopírované zadání

Průběh:

Studentům přečteme zadání, případně nakreslíme na tabuli pomocí schématu: tentokrát dorazila k řece opravdu zajímavá výprava: otec, matka, dva synové, dvě dcery, policista a zloděj. K dispozici je opět loď, která uveze dvě osoby. Navíc máme celou řadu omezení:

- Otec nemůže být sám ani s jednou dcerou bez přítomnosti matky.
- Matka nemůže být sama ani s jedním synem bez přítomnosti otce.

- Zloděj nesmí být s nikým z příslušníků rodiny bez přítomnosti policisty.
- Pouze otec, matka a policista umí pádlovat.

Řešení:

Hádanka vede stejně jako „vlk koza zelí“ k analýze stavového prostoru úlohy. Vhodné pro zamýšlení nad hledáním řešení pomocí počítačového programu.

Zranění muži

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

Náročnost: střední, 10 - 20 minut

Zaměření: stavový prostor, vhodná reprezentace, prohledávání do šířky

Materiál: okopírované zadání

Průběh:

Studentům přečteme zadání, případně nakreslíme na tabuli pomocí schématu: v poslední úloze o překonání řeky nevyužíváme loďku, ale most. Na jedné straně mostu jsou čtyři ranění muži. Je tma a most je rozbitý, takže po mostě mohou jít nanejvýš dva současně a potřebují k tomu baterku, kterou ovšem mají pouze jednu. Baterku nemohou házet. Míra zranění se liší, takže přechod mostu trvá každému muži jinou dobu: 5 min, 10 min, 20 min a 25 min. Pokud jdou dva společně, jdou samozřejmě tempem pomalejšího. Je docela jednoduché najít postup, jak se mohou všichni dostat na druhou stranu za 65 minut. Úkolem však je najít lepší řešení -- jde to totiž i za 60 minut.

Řešení:

Hádanka vede stejně jako „vlk koza zelí“ k analýze stavového prostoru úlohy. Vhodné pro zamýšlení nad hledáním řešení pomocí počítačového programu.

Hledání algoritmu: Bludiště

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

Náročnost: těžká, 20 - 30 minut

Zaměření: stavový prostor úlohy, vhodná reprezentace, algoritmické myšlení

Materiál: okopírované zadání

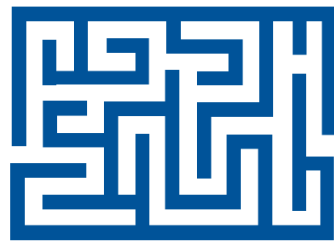
Průběh:

Studentům přečteme zadání a dáme jim čas na rozmyšlenou. Poté zahájíme diskusi na téma nejvhodnější řešení. V jejím průběhu můžeme studentům podávat nápovědy, aby na výsledné řešení přišli z vlastní iniciativy (například jak využít frontu, co je to stavový prostor hry atp.). Na závěr shrneme jeden z možných postupů.

Řešení:

- Bludiště zapíšeme v počítači pomocí textového formátu (viz obrázek)
- Stav hry definujeme pomocí pozice panáčka v bludišti (souřadnice $[x,y]$)
- Bludiště procházíme do šířky za využití fronty

- Pomocí dvourozměrného pole si pamatujeme již navštívené stavy a ty do fronty znovu nepřidáváme
- Zadání bludiště má řešení, pokud nalezeneme stav, kdy se panáček nachází u východu



```
#####
# # # # #
# # # # #
# # # # #
#####
# # # # #
# # # # #
# # # # #
#####
# # # # #
# # # # #
# # # # #
#####
# # # # #
# # # # #
# # # # #
#####
```

Hledání algoritmu: Koníková cesta

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

Náročnost: těžká, 20 - 40 minut

Zaměření: stavový prostor úlohy, vhodná reprezentace, algoritmické myšlení

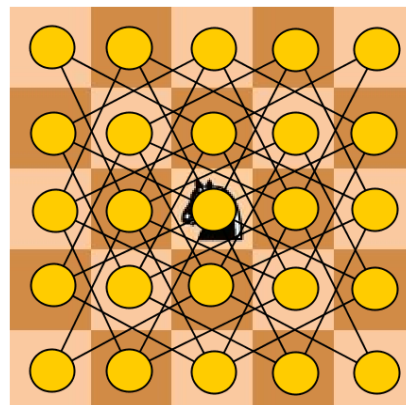
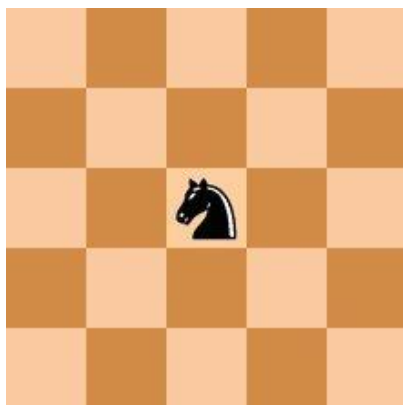
Materiál: okopírované zadání

Průběh:

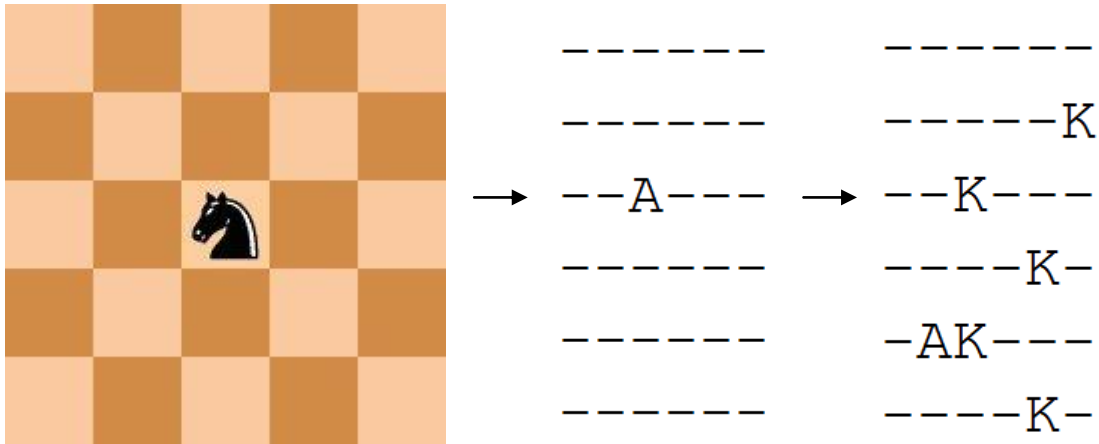
Studentům přečteme zadání a dáme jim čas na rozmyšlenou. Následně jim podáváme různé nápovědy (například jak využít frontu, co je to stavový prostor hry atp.). Na závěr uspořádáme diskusi nad možnými řešeními úlohy a shrneme jeden z možných způsobů řešení.

Řešení:

- Hádanku lze převést na graf, který reprezentuje políčka a povolené skoky koníčka
- Hledání řešení poté odkazuje na nalezení cesty v grafu, která navštíví všechny vrcholy
- Úlohu však lze řešit i bez využití grafové reprezentace



- Hádanku zapíšeme v počítači pomocí textového formátu
- Stav hry definujeme pomocí šachovnice již navštívených stavů a aktuální pozice
- Z každého stavu přidáme do fronty všechny potenciální následníky, tedy stavový prostor prozkoumáváme do šířky
- Zadání má řešení, pokud navštívíme všechna políčka šachovnice



Hledání algoritmu: Sokoban

Typ: individuální aktivita

Předpoklady: žádné

Náročnost: těžká, 30 - 50 minut

Zaměření: stavový prostor úlohy, vhodná reprezentace, algoritmické myšlení

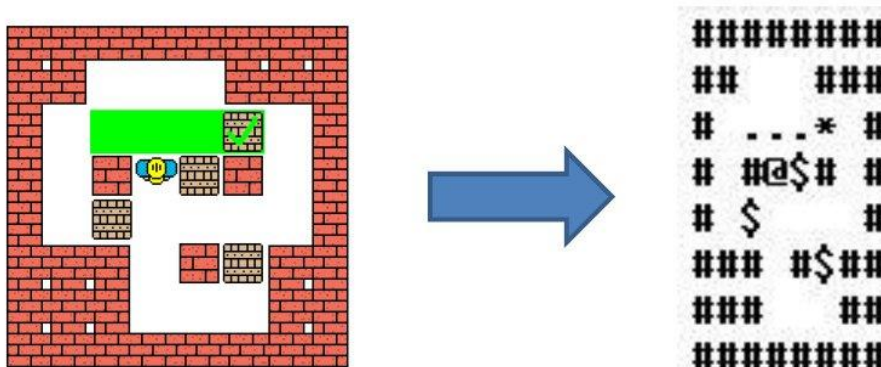
Materiál: okopírované zadání

Průběh:

Studentům přečteme zadání a dáme jim čas na rozmyšlenou. Následně jim podáváme různé nápovědy (například jak využít frontu, co je to stavový prostor hry atp.). Na závěr uspořádáme diskusi nad možnými řešeními úlohy a shrneme jeden z možných způsobů řešení.

Řešení:

- Zadání Sokobanu zapíšeme v počítači pomocí textového formátu
- Stav hry zapíšeme pomocí textového zápisu aktuálního rozestavení beden a panáčka (viz obrázek)
- Možné stavy hádanky procházíme do šířky
- Pomocí asociativního pole si pamatujeme již navštívené stavy a znovu je nenavštěvujeme
- Zadání má řešení, pokud při průchodu stavového prostoru nalezneme konfiguraci, kdy jsou všechny bedny na cílových pozicích



Zdroje

1. Jak to vyřešit, Radek Pelánek, 2010