Lineární algebra, transformace v rovině, fraktály

Radek Pelánek

IV122

Lineární algebra – pojmy

- skalár, vektor, matice
- sčítání, násobení, transpozice, inverze
- diagonální matice

Rozcvička

$$\begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

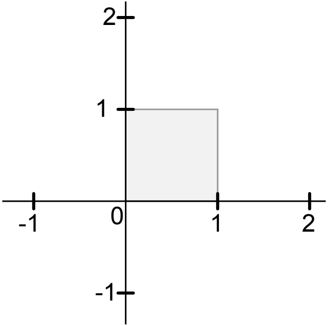
Rozcvička

$$\begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

Geometrická interpretace?

Rozcvička: geometrická interpretace

$$\begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$



Lineární a afinní transformace

- lineární transformace:
  - $f(a+b) = f(a) + f(b)$
  - $f(k \cdot a) = k \cdot f(a)$
- afinní transformace: lineární transformace + posun

Lineární a afinní transformace v rovině

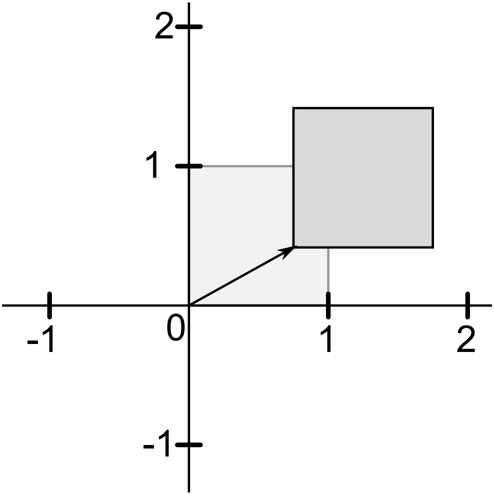
- posunutí
- překlopení
- rotace
- změna velikosti

Jak zapsat pomocí vektorů a matic?

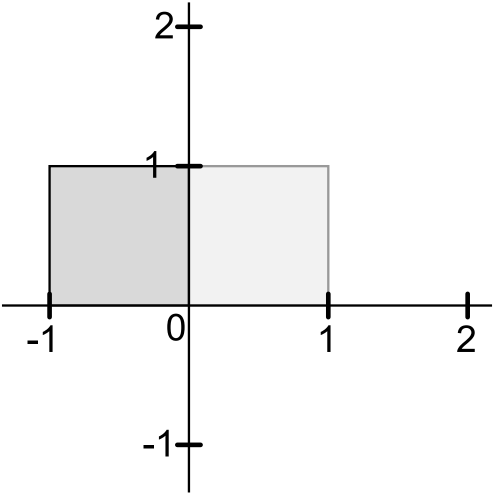
Lineární a afinní transformace v rovině

- lineární transformace $\sim$ násobení maticí 2×2
    - sloupce matice $\sim$ „kam se zobrazí body $[1, 0]$ a $[0, 1]$“
- afinní transformace $\sim$ násobení maticí 2×2 + přičtení vektoru délky 2

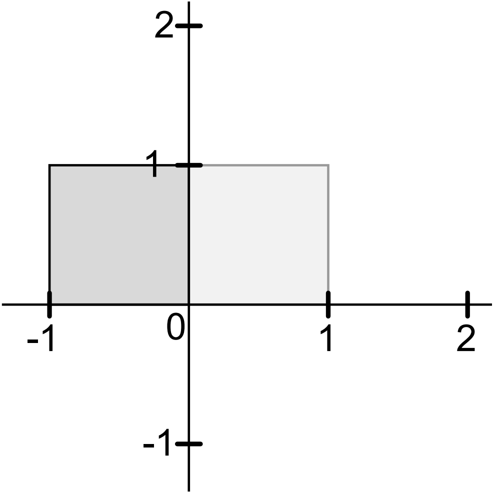
Posunutí (translation)



Překlopení (reflexion)

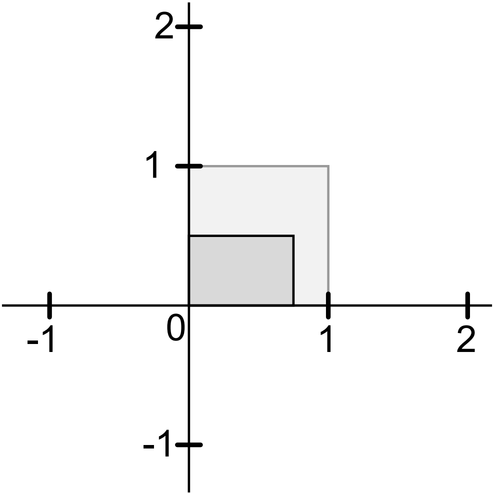


Překlopení (reflexion)

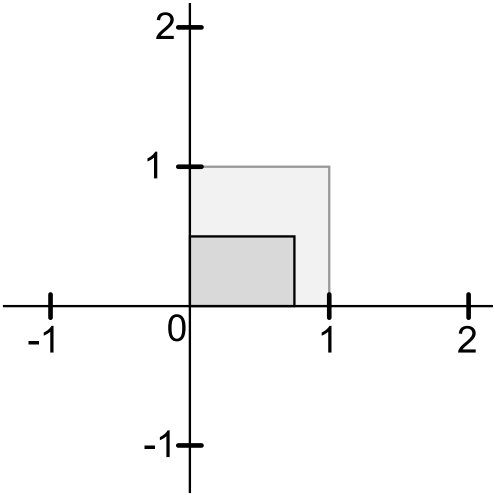


$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Změna velikosti (scaling)

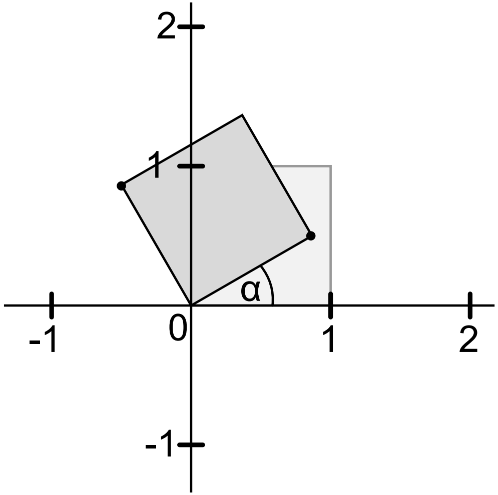


Změna velikosti (scaling)

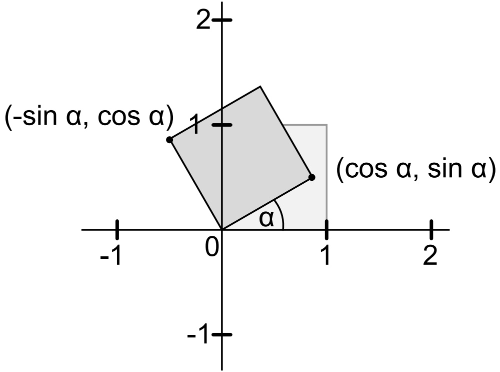


$$\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

Rotace (rotation)

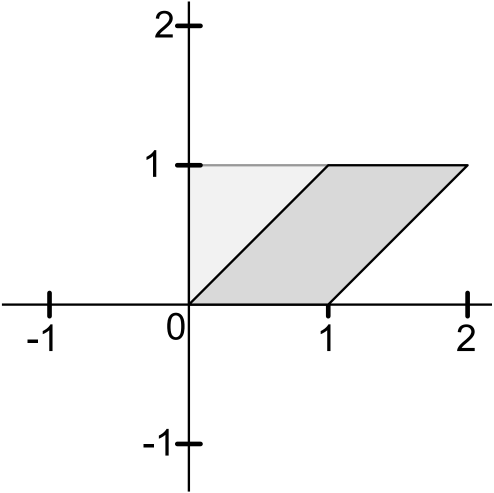


Rotace (rotation)



$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Shear



$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Homogenní souřadnice

- reprezentace afinních transformací pomocí matice 3×3
- bod (x, y) reprezentujeme vektorem $(x, y, 1)$
- skládání transformací $=$ násobení matic
  (pozor na pořadí násobení)

Klasické souřadnice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Homogenní souřadnice

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogenní souřadnice: příklady

Rotace

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posunutí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úkol: implementace transformací

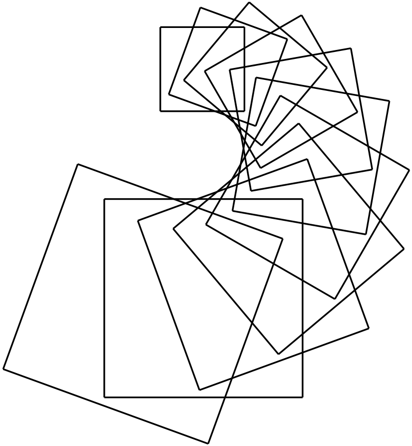
- transformace reprezentujte maticí 3×3
- zvolte vhodnou reprezentaci obrazce v rovině (např. seznam úseček)
- implementujte:
  - generování základních transformací, např. `rotation(angle)`, `scaling(sx, sy)`
  - skládání transformací
  - aplikaci transformace na obrazec
- otestujte

Rady

- funkcionální spíše než objektový styl programování
- transformace $\sim$ matice $\sim$ pole 3×3 (není potřeba nic navíc)
- funkce pro generování, skládání, aplikaci

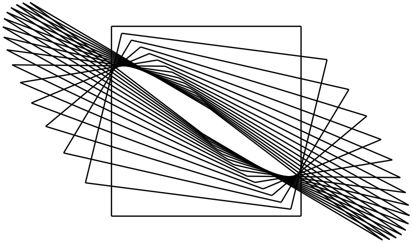
Ukázka 1

Repeat 10: rotation(20), scaling(1.1, 1.1), translation(5, 10)



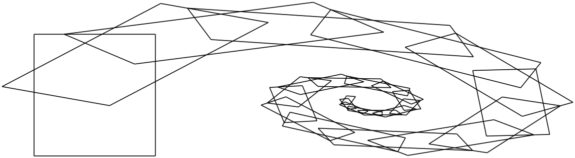
Ukázka 2

Repeat 15: rotation(10), scaling(1.1, 0.8)



Ukázka 3

Repeat 25: shear(1.3), rotation(10), scaling(0.9,0.9), translation(50, 50)



Poznámka

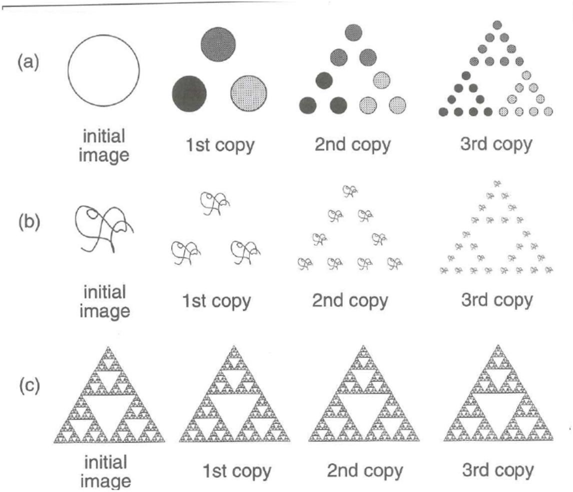
- uvedené příklady nemají vyznačené osy
- pro stejnou sekvenci operací můžete tedy dostat jiný výstup

(rozmyslete si, vyzkoušejte)

Multiple Reduction Copy Machine (MRCM)

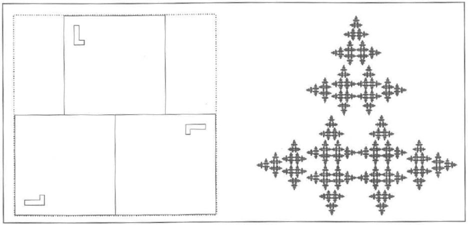
- speciální případ konceptu *deterministic iterated function system*
- iterovaně provádíme operaci:
  „nahraď obrazec několika zmenšenými kopiemi“
- iniciální obrázek není důležitý
- „atraktor“ operace (pevný bod, invariant) – typicky fraktál
- definice „zmenšených kopií“ pomocí afinních transformací

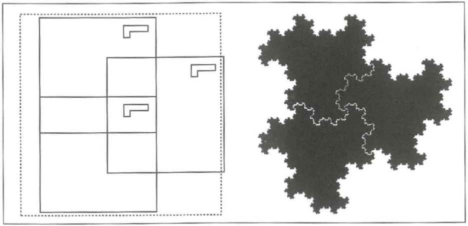
MRCM: princip



Peitgen, Jurgens, Saupe. *Chaos and Fractals*

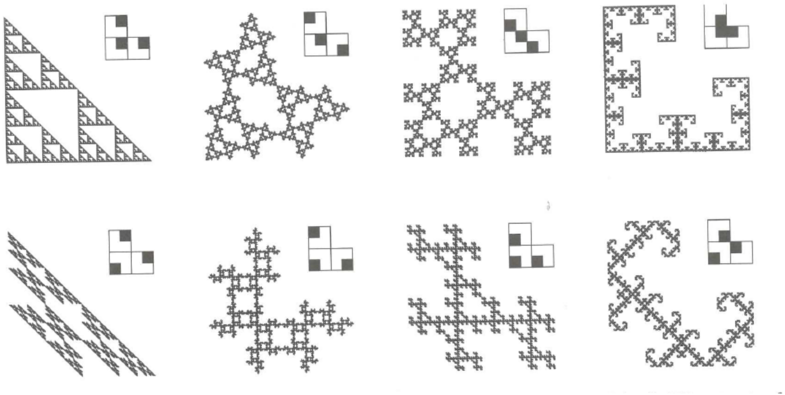
MRCM: příklady





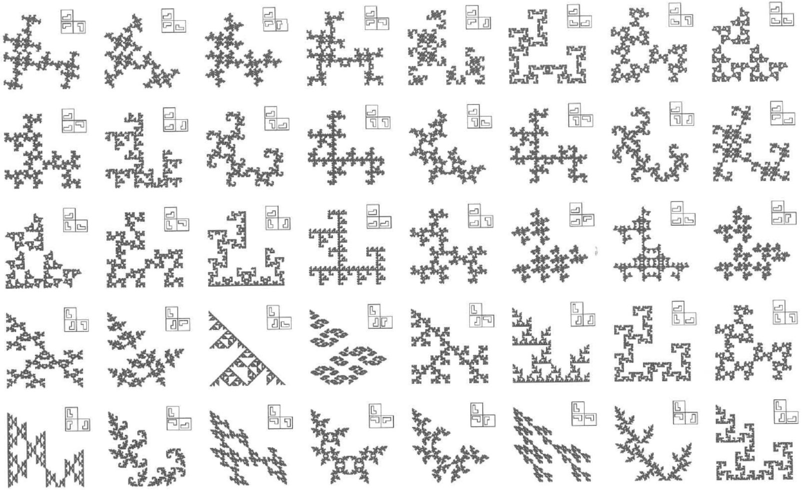
Peitgen, Jurgens, Saupe. *Chaos and Fractals*

Sierpińského příbuzní



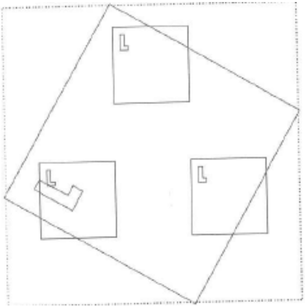
Peitgen, Jurgens, Saupe. *Chaos and Fractals*

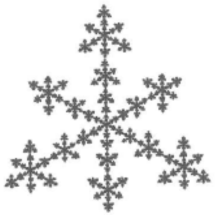
Sierpińského příbuzní



Peitgen, Jurgens, Saupe. *Chaos and Fractals*

Hvězda



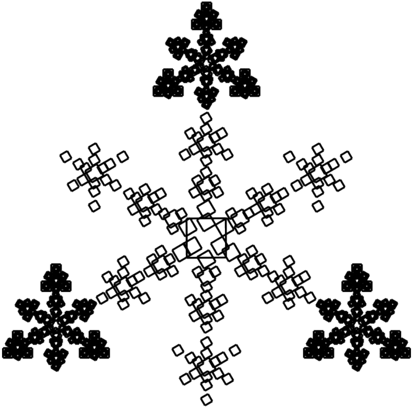


a	b	c	d	e	f
0.255	0	0	0.255	0.3726	0.6714
0.255	0	0	0.255	0.1146	0.2232
0.255	0	0	0.255	0.6306	0.2232
0.370	−0.642	0.642	0.370	0.6356	−0.0061

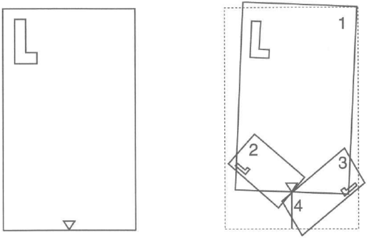
Interpretace uvedených konstant

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hvězda – přímočaré generování



Kapradí (Barnsley fern)



Initial Image

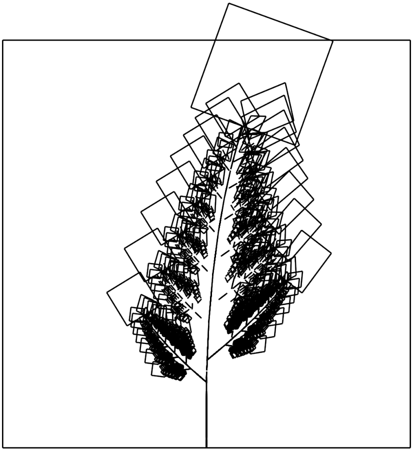
Stage 1

Peitgen, Jurgens, Saupe. *Chaos and Fractals*

Kapradí (Barnsley fern)

a	b	c	d	e	f
0.849	0.037	−0.037	0.849	0.075	0.183
0.197	−0.226	0.226	0.197	0.4	0.049
−0.15	0.283	0.26	0.237	0.575	0.084
0	0	0	0.16	0.5	0

Kapradí – přímočaré generování



Souvislosti

- princip MRCM souvisí s „chaos game“ (generování Sierpińského trojúhelníku za využití náhody, bitmapově)
- zkuste se nad souvislostmi zamyslet a využít princip chaos game třeba pro generování kapradí