Kombinatorika, výpočty

Radek Pelánek

IV122

Styl

- jednoduché výpočty s čísly
- zatím spíše opakování + pár dílčích zajímavostí
- užitečný trénink programování (rekurze)
- experimentování

Kombinace, permutace, variace

Daná množina M s n prvky

1. permutace $= \dots$
2. k prvkové kombinace $= \dots$
3. k prvkové kombinace s opakováním $= \dots$
4. k prvkové variace $= \dots$
5. k prvkové variace s opakováním $= \dots$

Kombinace, permutace, variace

Daná množina M s n prvky

1. permutace = uspořádání zadaných prvků do fixního pořadí
2. k prvkové kombinace = všechny možné výběry k prvků ze zadané množiny
3. k prvkové kombinace s opakováním = všechny možné výběry k prvků ze zadané množiny, přičemž prvky se mohou opakovat
4. k prvkové variace = všechny možné uspořádané výběry k prvků ze zadané množiny
5. k prvkové variace s opakováním = všechny možné uspořádané výběry k prvků ze zadané množiny, přičemž prvky se mohou opakovat

Kombinace, permutace, variace – příklady

Úloha	**Vstup**	**Výstup**
permutace	A, B, C	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
kombinace	A, B, C, D $k = 2$	AB, AC, AD, BC, BD, CD
kombinace s opakováním	A, B, C, D $k = 2$	AA, AB, AC, AD, BB, BC, BD, CC, CD, DD
variace	A, B, C, D $k = 2$	AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC
variace s opakováním	A, B, C $k = 2$	AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC

Kombinace, permutace, variace – počty prvků

Počet všech

- permutací n prvků $= \dots$
- k prvkových kombinací z $n = \dots$
- k prvkových kombinací s opakováním z n prvků $= \dots$
- k prvkových variací z n prvků $= \dots$
- k prvkových variací s opakováním z n prvků $= \dots$

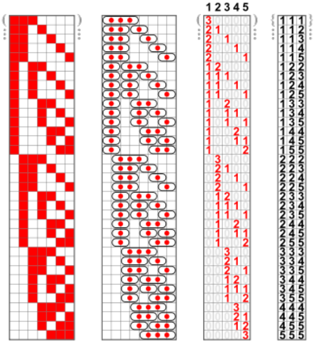
Kombinace, permutace, variace – počty prvků

Počet všech

- permutací n prvků $= n!$
- k prvkových kombinací z $n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- k prvkových kombinací s opakováním z n prvků $= \binom{n+k-1}{k}$
- k prvkových variací z n prvků $= \frac{n!}{(n-k)!}$
- k prvkových variací s opakováním z n prvků $= n^k$

Kombinace s opakováním – ilustrace

3 prvkové kombinace s opakováním z 5 prvků $\sim \binom{5+3-1}{3} \sim \binom{7}{3}$



https://en.wikipedia.org/wiki/Combination

Úkol: generování kombinací, permutací, variací

- Vstup: množina (seznam) a případně k
- Výstup: (uspořádaný) výpis všech permutací/kombinací/variací (s opakováním)

- vede na přirozené využití rekurze
- myšlenkově podobné $\Rightarrow$ programy by měly být podobné

Výpočet kombinačního čísla

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

```
def comb_number(n, k):
    if k == 0 or k == n:
        return 1
    else:
        return comb_number(n-1, k-1) + \
               comb_number(n-1, k)
```

Výpočet kombinačního čísla

- neefektivní – opakované výpočty
- podobné jako klasická ukázka neefektivního použití rekurze u Fibonacciho čísel
- efektivněji:
  - explicitní vztah
  - počítání „od spodu“

Pascalův trojúhelník

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

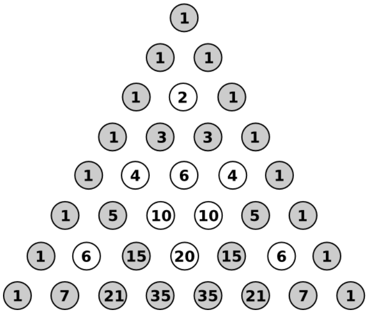
Explicitní vzorec

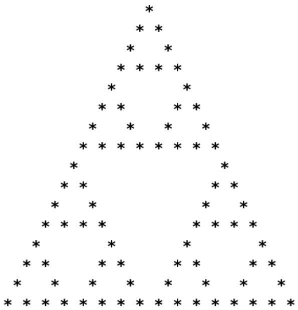
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Rekurzivní vztah

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

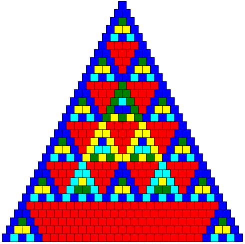
Pascalův trojúhelník a Sierpińského fraktál





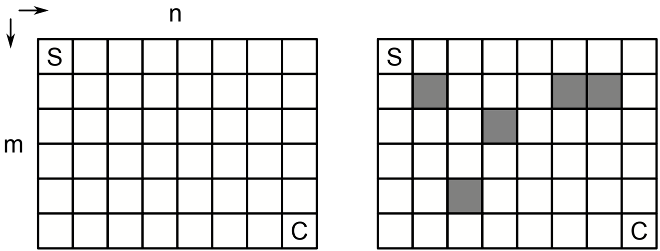
Obarvování čísel: Pascal a Ulam

- video Vi Hart: Sick Number Games
  http://www.youtube.com/watch?v=Yhlv5Aeuo_k
- obarvování Pascalova trojúhelníku modulo k
- vztah k jednorozměrným buněčným automatům



Rada: pozor na „přetečení“

Počítání cest



Umocňování

$$x^y$$

- x, y – kladná čísla (ne nutně celá)
- např. $3,45^{2,3}$
- co to vlastně znamená?
- jak vypočítat?
  přibližná hodnota, jen pomocí základních aritmetických operací

Umocňování: úkol

$$x^y$$

- vypočítat přibližnou hodnotu, jen pomocí základních aritmetických operací
- stačí jednoduché metody
- experimentálně prozkoumat chování: rychlost, přesnost

Efektivní umocňování

$$a^n \ mod \ k$$

- a, n, k – přirozená čísla
- n může být „velké“ (stovky cifer)
- jak vypočítat efektivně? (lépe než lineárně vzhledem k n)
- aplikace např. v kryptologii

Výpočet π

- $\pi = 3,141592653589793\ldots$
- iracionální číslo
- známé s přesností na miliardy cifer
- jak se určuje hodnota π?
- zmíníme jen velmi naivní metody – přímočaré cvičení na „experimentální porovnání“

Výpočet π

Gregoryho-Leibnizova řada (součet je π):

$$4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \cdots$$

(Důkaz: arctan(1), integrál)

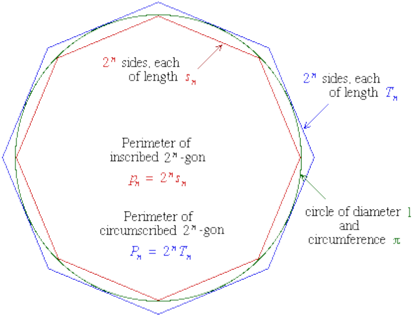
Výpočet π

Archimedova metoda (dvě posloupnosti a_n, b_n společně konvergující k π)

$$a_0 = 2\sqrt{3};\ b_0 = 3$$

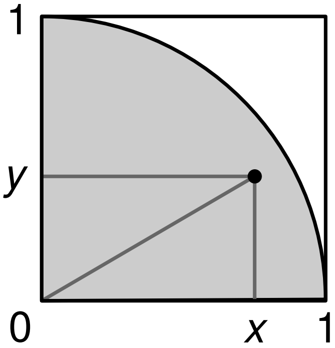
$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$



http://personal.bgsu.edu/~carother/pi/Pi3a.html

Výpočet π – Monte Carlo



- obsah čtvrtdisku: $\pi/4$
- obsah čtverce: 1

Úkol: Výpočet π

- implementujte uvedené metody
- (najděte další metody a implementujte je)
- experimentálně vyhodnoťte a porovnejte jednotlivé metody
- co je férové porovnání?

Úkol: Výpočet π

- implementujte uvedené metody
- (najděte další metody a implementujte je)
- experimentálně vyhodnoťte a porovnejte jednotlivé metody
- co je férové porovnání?
- jaké přesnosti jsou schopny dosáhnout během 1 vteřiny?

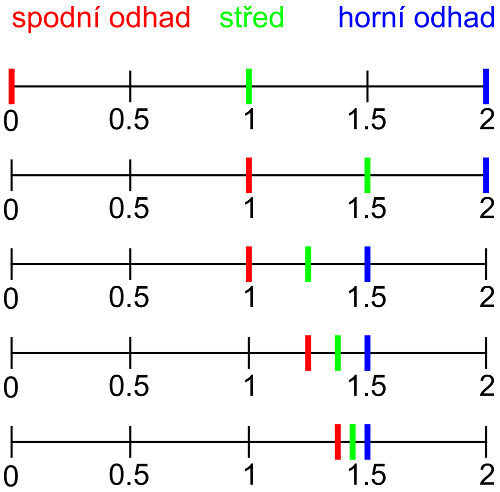
Umocňování: rady

$$x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$$

výpočet odmocniny:

- vstup: číslo x
- výstup: přibližná hodnota $\sqrt{x}$
- základní metoda: binární půlení (rozhodně ne nejvíce efektivní)

Výpočet odmocniny: binární půlení



Umocňování a Taylorova řada

Taylorova řada:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Pro $f(x) = x^k$ a $x_0 = 1$ lze snadno vypočítat.