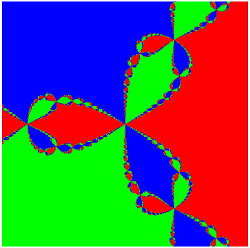
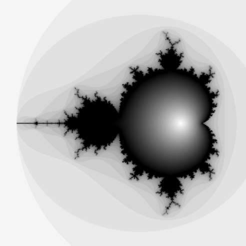
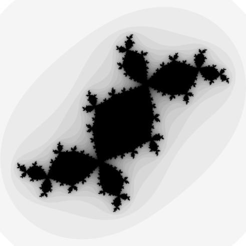
Fraktály a komplexní čísla

Radek Pelánek

IV122

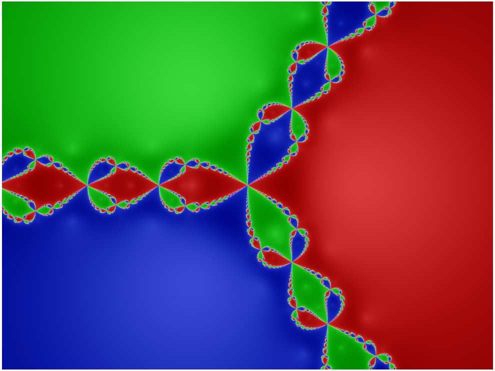
Komplexní čísla: připomenutí

- imaginární číslo $i = \sqrt{-1}$
- komplexní číslo: $x + yi$
- polární souřadnice: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$
- sčítání: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- násobení: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$
- velikost čísla: $\sqrt{x^2 + y^2}$

Komplexní čísla: test

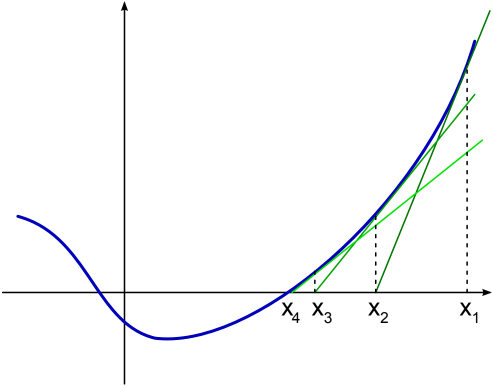
- $(3 - i) + (1 + 2i) = \dots$
- $(1 + i)^2 = \dots$
- $i^{39} = \dots$
- $|5 + i| = \dots$
- $(4 + 2i)/(2i) = \dots$
- $\sqrt{i} = \dots$
- $e^{\pi i} = \dots$

Newtonův fraktál



Zdroj: Wikipedia

Newtonova metoda



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

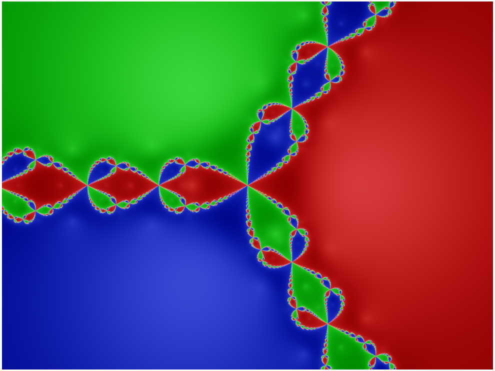
Newtonův fraktál

- $z^3 = 1$
- $z^3 - 1 = 0$
- jaká jsou řešení (v oboru komplexních čísel)?

Newtonův fraktál

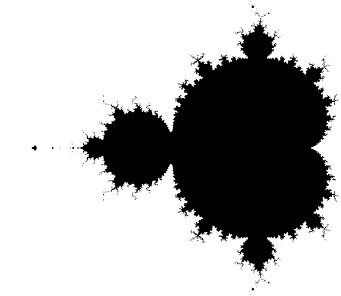
- $z^3 = 1$
- $z^3 - 1 = 0$
- jaká jsou řešení (v oboru komplexních čísel)?
- $1, -0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- Newtonova metoda: $z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}$
- pro iniciální bod $z_0 = x + yi$, ke kterému řešení konverguje?
- prakticky: 20 iterací, ke kterému řešení je 20. krok nejblíž?

Newtonův fraktál



Zdroj: Wikipedia

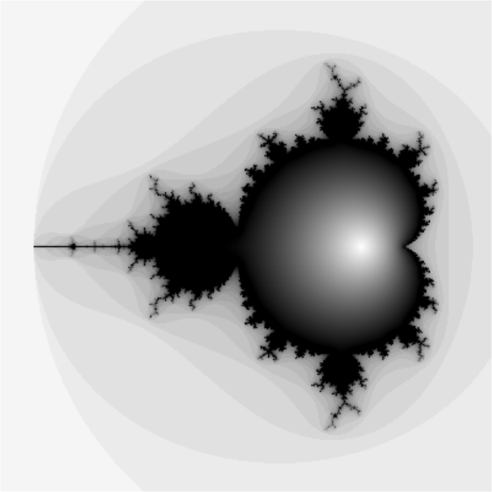
Mandelbrotova množina



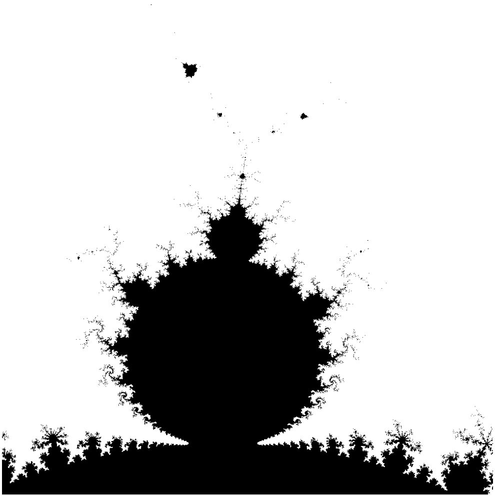
YouTube: Mandelbrot Zoom, např.

https://www.youtube.com/watch?v=PD2XgQOyCCk

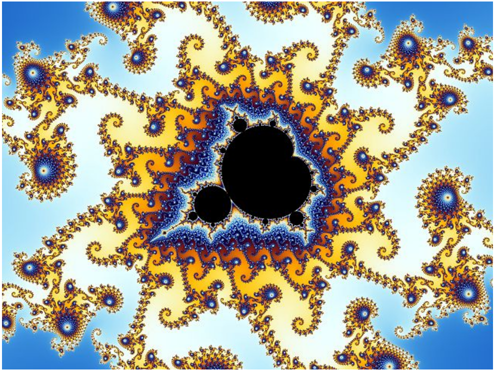
Mandelbrotova množina



Mandelbrotova množina

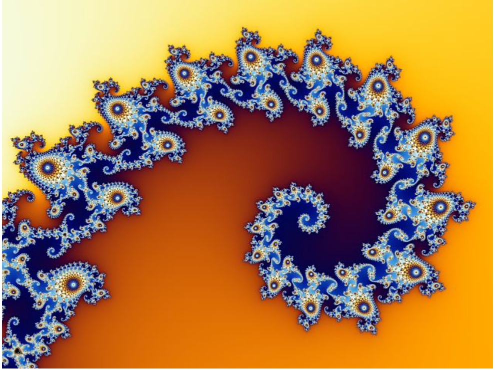


Mandelbrotova množina



Zdroj: Wikipedia

Mandelbrotova množina



Zdroj: Wikipedia

Mandelbrotova množina

- $z_1 = 0$, $c = x + yi$ je konstanta (komplexní číslo)
- definujeme posloupnost

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

- c patří do Mandelbrotovy množiny $\Leftrightarrow$ tato posloupnost je omezená

Alternativní definice přes reálné posloupnosti:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + c_x$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + c_y$$

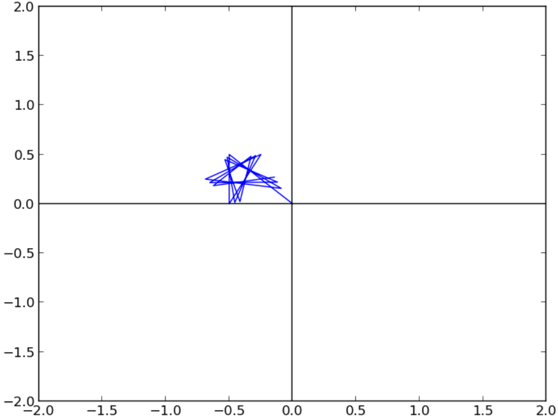
Mandelbrotova množina

Příklady:

- $c = 1$
  $0, 1, 2, 5, 26, \ldots$
  není ohraničená
  číslo 1 nepatří do Mandelbrotovy množiny
- $c = i$
  $0, i, (-1 + i), -i, (-1 + i), -i, \ldots$
  je ohraničená
  číslo i patří do Mandelbrotovy množiny

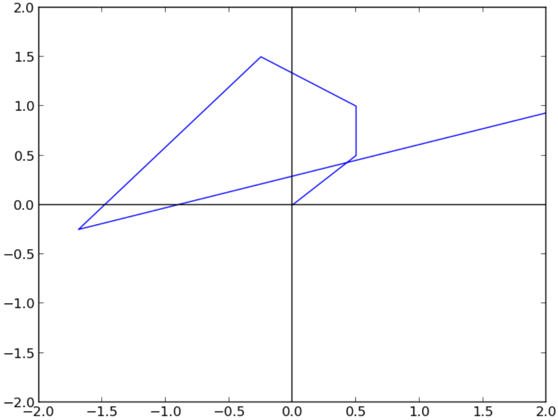
Mandelbrotova množina: ukázka posloupnosti

$c = -0.5 + 0.5i$



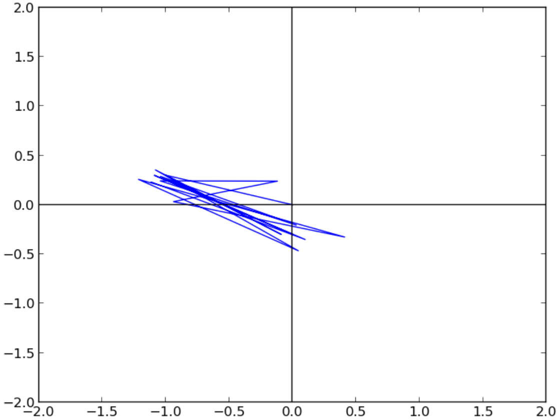
Mandelbrotova množina: ukázka posloupnosti

$c = 0.5 + 0.5i$



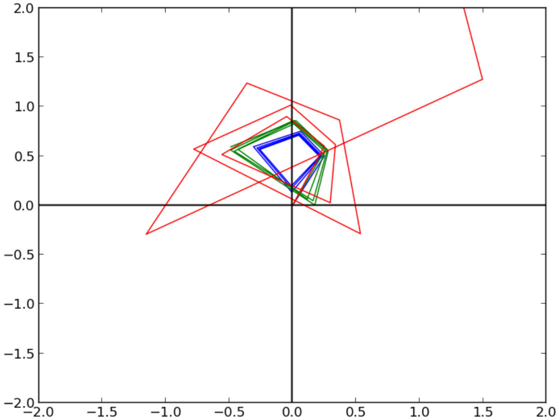
Mandelbrotova množina: ukázka posloupnosti

$c = -1 + 0.3i$

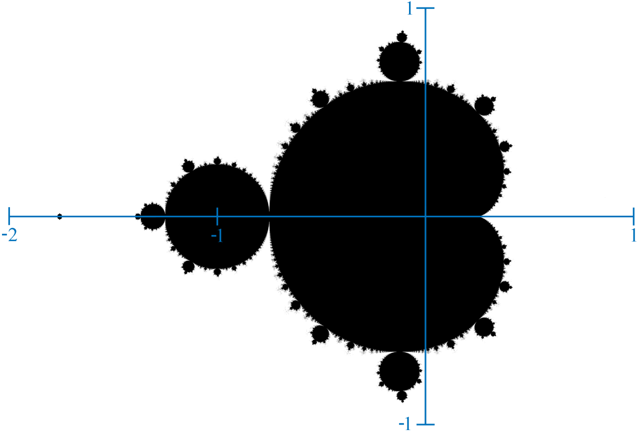


Mandelbrotova množina: ukázka posloupnosti

$c = 0.25 + 0.5i$ (modrá)
$c = 0.25 + 0.55i$ (zelená)
$c = 0.25 + 0.6i$ (červená)



Mandelbrotova množina



Zdroj: Wikipedia

Mandelbrotova množina: heuristická metoda

- uděláme 30 iterací
- c dáme do množiny $\Leftrightarrow$ poslední člen má velikost ≤ 2

Mandelbrotova množina – zdrojový kód

```
_                                      =   (
                                        255,
                                      lambda
                               V       ,B,c
                             :c   and Y(V*V+B,B,  c
                               -1)if(abs(V)<6)else
               (              2+c-4*abs(V)**-0.4)/i
                 )  ;v,      x=1500,1000;C=range(v*x
                  );import  struct;P=struct.pack;M,\
            j  ='<QIIHHHH',open('M.bmp','wb').write
for X in j('BM'+P(M,v*x*3+26,26,12,v,x,1,24))or C:
            i  ,Y=_;j(P('BBB',*(lambda T:(T*80+T**9
                  *i-950*T  **99,T*70-880*T**18+701*
                 T  **9     ,T*i**(1-T**45*2)))(sum(
               [              Y(0,(A%3/3.+X%v+(X/v+
                               A/3/3.-x/2)/1j)*2.5
                             /x   -2.7,i)**2 for  \
                               A       in C
                                      [:9]])
                                        /9)
                                       )   )
```

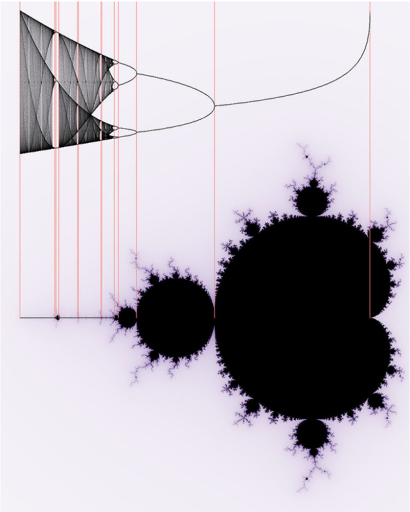
http://preshing.com/20110926/high-resolution-mandelbrot-in-obfuscated-python/

Mandelbrotova množina: obarvení

jednoduché metody:

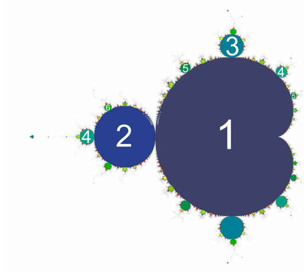
- vnější body: počet iterací potřebných na překročení velikosti 2
- vnitřní body: průměrná vzdálenost od (0,0) v průběhu iterací

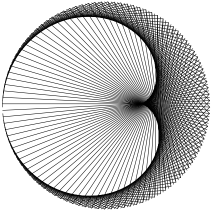
Mandelbrotova množina a bifurkace

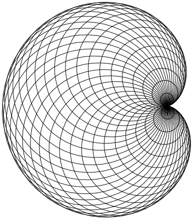


Wikipedia

Mandelbrotova množina a kardioida



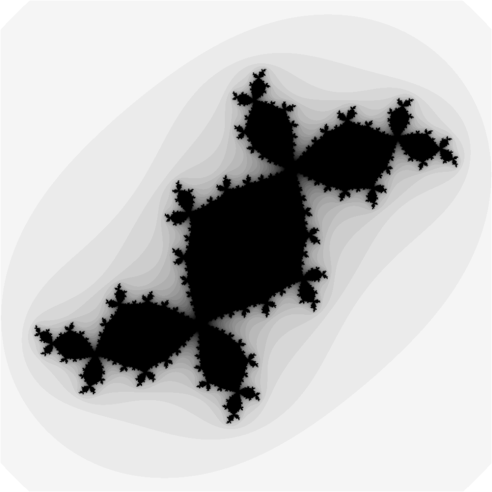




https://www.youtube.com/watch?v=qhbuKbxJsk8

Juliova množiny

Juliova množina pro $c = -0.13 + 0.75i$



Juliovy množiny

- opět stejná rovnice $z_{n+1} = z_n^2 + c$
- jedno fixní c
- zkoumáme, pro které iniciální body $z_1 = x + yi$ je posloupnost ohraničená
- Juliova množina pro hodnotu c je souvislá $\Leftrightarrow$ c patří do Mandelbrotovy množiny.

  https://www.marksmath.org/visualization/julia_sets/
- pozn. pojem Juliova množina použit zjednodušeně