# Sémantika predikátové logiky

- pro analýzu sémantiky potřebujeme nejprve specifikaci jazyka (doména, konstanty, funkční a predikátové symboly)
- příklad: formální jazyk s jediným binárním predikátovým symbolem $P(x, y)$ a jediným binárním funkčním symbolem $f(x, y)$ lze chápat mj. jako
  - přirozená čísla s $<$ a $+$
  - racionální čísla s $\geq$ a $max$
  - celá čísla s $>$ a $*$
- *interpretace (realizace)* jazyka predikátové logiky je struktura $I$ složená z
  - libovolné neprázdné množiny $\mathbf{D}$ (domény, oboru interpretace)
  - zobrazení $I(f) : \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$ pro každý $n$-ární funkční symbol $f, n \geq 0$
  - $n$-ární relace $I(P) \subseteq \mathbf{D}^n$ pro každý $n$-ární predikátový symbol $P$, $n \geq 1$

# Interpretace jazyka: příklad

Příklad: mějme jazyk s binárním predikátovým symbolem $P(x, y)$, binárním funkčním symbolem $f(x, y)$ a symboly pro konstanty $a, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, který chceme interpretovat jako celá čísla s $>$ a $+$.

- $\mathbf{D}$ je množina celých čísel,
- $I(a) = 0, I(a_1) = 1, I(a_2) = 2, \ldots, I(b_1) = -1, I(b_2) = -2, \ldots$ (jedná se o nulární funkce),
- $I(f) = +$ (funkce zadaná pomocí rovnosti funkcí: zobrazení $I(f)$ definujeme jako funkci sčítání celých čísel; pak např. $I(f)(4, -2) = 2$),
- $I(P) = \ >$ (relace zadaná pomocí rovnosti relací: $I(P)$ definujeme jako relaci ‚větší než' pro celá čísla; např. $(2, -1) \in I(P)$)

# Interpretace proměnných a termů

- interpretace volných proměnných spočívá v jejich ohodnocení, což je libovolné zobrazení $V$ (valuace) z množiny všech proměnných do $\mathbf{D}$
- ohodnocení, které přiřazuje proměnné $x$ prvek $d \in \mathbf{D}$ a na ostatních proměnných splývá s valuací $V$, označíme $V[x/d]$
- hodnotou termu $t$ v interpretaci $I$ a valuaci $V$ je prvek $|t|_{I,V} \in \mathbf{D}$ takový, že
  - je-li $t$ proměnná, $|t|_{I,V} = V(t)$
  - je-li $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, pak $|t|_{I,V}$ je hodnotou funkce $I(f)$ pro argumenty $|t_1|_{I,V}, \ldots, |t_n|_{I,V}$
- příklad: mějme interpretaci $I$ z předchozího příkladu (celá čísla s $>$ a $+$) a valuaci $V(x) = 2$. Pak
  $|f(b_1, f(b_2, b_2))|_{I,V} = +(-1, +(-2, -2)) = -5$
  $|f(f(a, b_1), f(x, a_1))|_{I,V} = +(+(0, -1), +(2, 1)) = 2$

# Splnitelnost formulí

Formule $A$ je splňována interpretací $I$ a valuací $V$, pokud

- $A$ je $P(t_1, \ldots, t_n)$ a $(|t_1|_{I,V}, \ldots, |t_n|_{I,V}) \in I(P)$
- $A$ je $t_1 = t_2$ a $|t_1|_{I,V} = |t_2|_{I,V}$ (oba termy reprezentují týž prvek)
- $A$ je $\neg B$ a $I, V$ nesplňují $B$
- $A$ je tvaru $B \wedge C$ a $I, V$ splňují $B$ i $C$
- $A$ je $B \vee C$ a $I, V$ splňují $B$ nebo $C$
- $A$ je tvaru $B \Rightarrow C$ a $I, V$ nesplňují $B$ nebo splňují $C$
- $A$ je $B \Leftrightarrow C$ a $I, V$ splňují $B$ i $C$ nebo nesplňují $B$ i $C$
- $A$ je $\forall x B$ a $I, V[x/d]$ splňují $B$ pro libovolné $d \in \mathbf{D}$
- $A$ je $\exists x B$ a $I, V[x/d]$ splňují $B$ alespoň pro jedno $d \in \mathbf{D}$

# Splnitelnost – příklad

Příklad: mějme dříve uvedenou interpretaci $I$ (celá čísla s $>$ a $+$), mějme jinou interpretaci $I'$ téhož formálního jazyka (celá čísla s $>$ a $*$, od $I$ se liší pouze definicí $I'(f) = *$) a valuace definované na proměnné $x$ takto: $V_1(x) = -2$, $V_2(x) = 2$

- formuli $\forall x P(f(x, a_1), x)$ interpretujeme v $I$ jako $\forall x(x + 1 > x)$; formule je splňována $I$ a libovolnou valuací. V $I'$ interpretujeme formuli jako $\forall x(x * 1 > x)$ – není splněna pro libovolnou valuaci.
- $\forall x P(x, y)$ interpretujeme (v $I$ i $I'$) jako $\forall x(x > y)$, formule není splňována $I$ (ani $I'$) a libovolnou valuací
- formule $P(x, a)$ interpretovaná (v $I$ i $I'$) jako $x > 0$ je splňována $I$ (i $I'$) a $V_2$, není splňována $I$ (ani $I'$) a $V_1$
- formule $\forall x(P(x, a) \Rightarrow \exists y P(x, y))$ interpretovaná (v $I$ i $I'$) jako $\forall x((x > 0) \Rightarrow \exists y(x > y))$ je splňována $I$ (i $I'$) a libovolnou valuací

# Pravdivost formulí a jejich klasifikace

- formuli $A$ nazveme *pravdivou* v interpretaci $I$, je-li splňována $I$ pro libovolnou valuaci, píšeme $\models_I A$
- pravdivost formule záleží pouze na valuaci volných proměnných, které se v ní vyskytují
- pravdivost sentence (uzavřené formule) nezávisí na valuaci vůbec

Formule $A$ predikátové logiky se nazývá

- *tautologie*, je-li pravdivá pro každou interpretaci (tj. pro každou $I$ platí $\models_I A$), značíme $\models A$
- *splnitelná*, pokud existuje alespoň jedna interpretace a valuace, které ji splňují (př.: $\forall x P(x, x)$)
- *kontradikce*, je-li $\neg A$ tautologie (tj. $\models \neg A$)

# Logické vyplývání

- formule $B$ *logicky vyplývá* z množiny formulí $\{A_1, \ldots, A_n\}$, $n \geq 0$, pokud pro každou interpretaci $I$, v níž platí $\models_I A_1, \ldots, \models_I A_n$, platí také $\models_I B$. Píšeme $A_1, \ldots, A_n \models B$.
- příklad: $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), P(a) \models Q(a)$
  V libovolné interpretaci, kde jsou pravdivé $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ a $P(a)$, je pravdivá také $Q(a)$, např.
  - lidé, $P$ být člověk, $Q$ být smrtelný, $a =$ Sokrates
  - čísla, $P$ být sudé číslo, $Q$ být beze zbytku dělitelný dvěma, $a = 144$
  - zvířata, $P$ být kosatka, $Q$ být savec, $a =$ kosatka Willy

# Tautologie predikátové logiky

Získané z tautologií výrokové logiky:

- nahradíme-li v tautologii výrokové logiky korektně všechny výrokové symboly formulemi predikátové logiky, získáme tautologii predikátové logiky
- příklad: v tautologii výrokové logiky $\models p \vee \neg p$ nahraďme $p$ formulí $\forall x P(x)$, získáme tak tautologii predikátové logiky $\models \forall x P(x) \vee \neg \forall x P(x)$

Specifické pro predikátovou logiku:

- označme $A(x)$ libovolnou formuli obsahující volnou proměnnou $x$, $A(x,y)$ libovolnou formuli obsahující volné proměnné $x$ a $y$ apod.
- příklady tautologií:
  $\forall x A(x) \Rightarrow A(x/t)$ (zákon konkretizace)
  $A(x/t) \Rightarrow \exists x A(x)$ (zákon abstrakce)

# Specifické tautologie predikátové logiky I

- de Morganovy zákony pro kvantifikátory:

  $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

  $\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

  příklad: negací věty *Na každém hradě straší bílá paní.* $\forall x(H(x) \Rightarrow S(x))$

  je zřejmě *Na některých hradech bílá paní nestraší.*

  $\exists x \neg(H(x) \Rightarrow S(x)) \Leftrightarrow \exists x(H(x) \wedge \neg S(x))$

- zaměnitelnost kvantifikátorů stejného typu (zobecnění komutativity $\wedge$ a $\vee$):

  $\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$

  $\exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$

- distributivita kvantifikátorů (zobecnění asociativity $\wedge$ a $\vee$):

  $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x))$

  $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$

# Specifické tautologie predikátové logiky II

- vztahy mezi $\forall$ a $\exists$:

  $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$

  (pozn.: požadavek neprázdnosti domény; pro prázdnou doménu jsou např. $\forall x P(x)$ i $\forall x \neg P(x)$ pravdivé, ale $\exists x P(x)$ i $\exists x \neg P(x)$ nepravdivé – tautologie by tedy neplatila)

  $\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A(x)$

  $\exists x A(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A(x)$

- zaměnitelnost kvantifikátorů (jednosměrná):

  $\exists x \forall y A(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$

- redukce univerzálního kvantifikátoru:

  $\forall x \forall y A(x, y) \Rightarrow \forall x A(x, x)$

- vztah $\forall$ k disjunkci a $\exists$ ke konjunkci:

  $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$

  $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$

# Formální systémy predikátové logiky

- sledujeme stejné cíle (budování teorií) a zajímají nás tytéž vlastnosti (korektnost, úplnost, rozhodnutelnost, nezávislost axiomů) jako v systémech pro výrokovou logiku
- všechny systémy uvedené pro výrokovou logiku lze rozšířit pro predikátovou logiku
- budeme se zabývat rozšířením axiomatického systému a zejména rezolucí

# Axiomatický systém predikátové logiky I

- používáme spojky $\{\Rightarrow, \neg\}$ a kvantifikátor $\forall$. Ostatní spojky jsou chápány jako zkratky uvedené ve výr. logice, resp. $\exists x A =_{df} \neg\forall x \neg A$
- axiomy pro spojky ($A, B, C$ jsou formule) – shodné s výr. logikou:
  $\mathbf{A_1}$ $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  $\mathbf{A_2}$ $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  $\mathbf{A_3}$ $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- axiomy pro $\forall$:
  $\mathbf{A_4}$ $\forall x A \Rightarrow A(x/t)$
  $\mathbf{A_5}$ $\forall x(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x B)$, $A$ neobsahuje volně $x$

# Axiomatický systém predikátové logiky II

- axiomy pro rovnost:

  $\mathbf{A_6}$ $x = x$

  $\mathbf{A_7}$ $(x = y) \Rightarrow (f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$

  $\mathbf{A_8}$ $(x = y) \Rightarrow (P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$

- odvozovací pravidla:
  - *modus ponens* (MP, stejné s výr. logikou): z $A$ a $A \Rightarrow B$ odvodíme $B$ pro libovolné formule $A, B$
  - *generalizace* (PG): z $A$ odvodíme $\forall x A$

# Axiomatický systém: příklad

Příklad: důkaz z předpokladu. Ukažte, že pokud je dokazatelná formule $A \Rightarrow B$ a proměnná $x$ není volná v $A$, pak je dokazatelná i formule $A \Rightarrow \forall x B$.

1. $\vdash A \Rightarrow B$ předpoklad
2. $\vdash \forall x(A \Rightarrow B)$ PG(1)
3. $\vdash \forall x(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x B)$ $\mathbf{A_5}$
4. $\vdash A \Rightarrow \forall x B$ MP(2,3)

# Využití axiomatického systému: teorie

- *teorie:* množina uzavřených formulí $\mathbf{T}$, *model* teorie $\mathbf{T}$: interpretace, v níž je každá formule z $\mathbf{T}$ pravdivá

Příklad: teorie elementární aritmetiky ($0$, unární funkce následník $s$, binární $+, *$)

- $\mathbf{Ax_1}$ $\forall x \neg(s(x) = 0)$
  $\mathbf{Ax_2}$ $\forall x(x + 0 = x)$
  $\mathbf{Ax_3}$ $\forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))$
  $\mathbf{Ax_4}$ $\forall x(x * 0 = 0)$
  $\mathbf{Ax_5}$ $\forall x \forall y(x * s(y) = (x * y) + x)$

- pomocná odvozovací pravidla:
  (PS) je-li $\vdash x = y$, pak $\vdash y = x$ (symetrie $=$)
  (PT) je-li $\vdash x = y$ a $\vdash y = z$, pak $\vdash x = z$ (tranzitivita $=$)
  (PPS) je-li $\vdash x = y$, pak $\vdash s(x) = s(y)$ (přidání $s$)
  (PVS) je-li $\vdash s(x) = s(y)$, pak $\vdash x = y$ (vypuštění $s$)

Příklad: dokažte v teorii elementární aritmetiky $s(0) + s(0) = s(s(0))$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\vdash \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$ | $\mathbf{Ax_3}$ |
| 2. | $\vdash (\forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))) \Rightarrow$ $(\forall y (s(0) + s(y) = s(s(0) + y)))$ | $\mathbf{A_4}$ |
| 3. | $\vdash \forall y (s(0) + s(y) = s(s(0) + y))$ | MP(1,2) |
| 4. | $\vdash (\forall y (s(0) + s(y) = s(s(0) + y))) \Rightarrow$ $(s(0) + s(0) = s(s(0) + 0))$ | $\mathbf{A_4}$ |
| 5. | $\vdash s(0) + s(0) = s(s(0) + 0)$ | MP(3,4) |
| 6. | $\vdash \forall x (x + 0 = x)$ | $\mathbf{Ax_2}$ |
| 7. | $\vdash (\forall x (x + 0 = x)) \Rightarrow (s(0) + 0 = s(0))$ | $\mathbf{A_4}$ |
| 8. | $\vdash s(0) + 0 = s(0)$ | MP(6,7) |
| 9. | $\vdash s(s(0) + 0) = s(s(0))$ | PPS(8) |
| 10. | $\vdash s(0) + s(0) = s(s(0))$ | PT(5,9) |