Sémantika predikátové logiky

- pro analýzu sémantiky potřebujeme nejprve specifikaci jazyka (doména, konstanty, funkční a predikátové symboly)
- příklad: formální jazyk s jediným binárním predikátovým symbolem $P(x, y)$ a jediným binárním funkčním symbolem $f(x, y)$ lze chápat mj. jako
  - přirozená čísla s $<$ a $+$
  - racionální čísla s $\geq$ a max
  - celá čísla s $>$ a $*$
- *interpretace (realizace)* jazyka predikátové logiky je struktura I složená z
  - libovolné neprázdné množiny $\mathbf{D}$ (domény, oboru interpretace)
  - zobrazení $I(f) : \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$ pro každý n-ární funkční symbol $f, n \geq 0$
  - n-ární relace $I(P) \subseteq \mathbf{D}^n$ pro každý n-ární predikátový symbol P, $n \geq 1$

Interpretace jazyka: příklad

Příklad: mějme jazyk s binárním predikátovým symbolem $P(x, y)$, binárním funkčním symbolem $f(x, y)$ a symboly pro konstanty $a, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, který chceme interpretovat jako celá čísla s $>$ a $+$.

- $\mathbf{D}$ je množina celých čísel,
- $I(a) = 0, I(a_1) = 1, I(a_2) = 2, \ldots, I(b_1) = -1, I(b_2) = -2, \ldots$ (jedná se o nulární funkce),
- $I(f) = +$
  (funkce zadaná pomocí rovnosti funkcí: zobrazení $I(f)$ definujeme jako funkci sčítání celých čísel; pak např. $I(f)(4, -2) = 2$),
- $I(P) = >$
  (relace zadaná pomocí rovnosti relací: $I(P)$ definujeme jako relaci ‚větší než' pro celá čísla; např. $(2, -1) \in I(P)$)

Interpretace proměnných a termů

- interpretace volných proměnných spočívá v jejich ohodnocení, což je libovolné zobrazení V (valuace) z množiny všech proměnných do $\mathbf{D}$
- ohodnocení, které přiřazuje proměnné x prvek $d \in \mathbf{D}$ a na ostatních proměnných splývá s valuací V, označíme $V[x/d]$
- hodnotou termu t v interpretaci I a valuaci V je prvek $|t|_{I,V} \in \mathbf{D}$ takový, že
  - je-li t proměnná, $|t|_{I,V} = V(t)$
  - je-li $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, pak $|t|_{I,V}$ je hodnotou funkce $I(f)$ pro argumenty $|t_1|_{I,V}, \ldots, |t_n|_{I,V}$
- příklad: mějme interpretaci I z předchozího příkladu (celá čísla s $>$ a $+$) a valuaci $V(x) = 2$. Pak
  $|f(b_1, f(b_2, b_2))|_{I,V} = +(-1, +(-2, -2)) = -5$
  $|f(f(a, b_1), f(x, a_1))|_{I,V} = +(+(0, -1), +(2, 1)) = 2$

Splnitelnost formulí

Formule A je splňována interpretací I a valuací V, pokud

- A je $P(t_1, \ldots, t_n)$ a $(|t_1|_{I,V}, \ldots, |t_n|_{I,V}) \in I(P)$
- A je $t_1 = t_2$ a $|t_1|_{I,V} = |t_2|_{I,V}$ (oba termy reprezentují týž prvek)
- A je $\neg B$ a I, V nesplňují B
- A je tvaru $B \wedge C$ a I, V splňují B i C
- A je $B \vee C$ a I, V splňují B nebo C
- A je tvaru $B \Rightarrow C$ a I, V nesplňují B nebo splňují C
- A je $B \Leftrightarrow C$ a I, V splňují B i C nebo nesplňují B i C
- A je $\forall x B$ a $I, V[x/d]$ splňují B pro libovolné $d \in \mathbf{D}$
- A je $\exists x B$ a $I, V[x/d]$ splňují B alespoň pro jedno $d \in \mathbf{D}$

Splnitelnost – příklad

Příklad: mějme dříve uvedenou interpretaci I (celá čísla s $>$ a $+$), mějme jinou interpretaci I' téhož formálního jazyka (celá čísla s $>$ a $*$, od I se liší pouze definicí $I'(f) = *$) a valuace definované na proměnné x takto: $V_1(x) = -2$, $V_2(x) = 2$

- formuli $\forall x P(f(x, a_1), x)$ interpretujeme v I jako $\forall x(x + 1 > x)$; formule je splňována I a libovolnou valuací. V I' interpretujeme formuli jako $\forall x(x * 1 > x)$ – není splněna pro libovolnou valuaci.
- $\forall x P(x, y)$ interpretujeme (v I i I') jako $\forall x(x > y)$, formule není splňována I (ani I') a libovolnou valuací
- formule $P(x, a)$ interpretovaná (v I i I') jako $x > 0$ je splňována I (i I') a V_2, není splňována I (ani I') a V_1
- formule $\forall x(P(x, a) \Rightarrow \exists y P(x, y))$ interpretovaná (v I i I') jako $\forall x((x > 0) \Rightarrow \exists y(x > y))$ je splňována I (i I') a libovolnou valuací

Pravdivost formulí a jejich klasifikace

- formuli A nazveme *pravdivou* v interpretaci I, je-li splňována I pro libovolnou valuaci, píšeme $\models_I A$
- pravdivost formule záleží pouze na valuaci volných proměnných, které se v ní vyskytují
- pravdivost sentence (uzavřené formule) nezávisí na valuaci vůbec

Formule A predikátové logiky se nazývá

- *tautologie*, je-li pravdivá pro každou interpretaci (tj. pro každou I platí $\models_I A$), značíme $\models A$
- *splnitelná*, pokud existuje alespoň jedna interpretace a valuace, které ji splňují (př.: $\forall x P(x, x)$)
- *kontradikce*, je-li $\neg A$ tautologie (tj. $\models \neg A$)

Logické vyplývání

- formule B *logicky vyplývá* z množiny formulí $\{A_1, \ldots, A_n\}$, $n \geq 0$, pokud pro každou interpretaci I, v níž platí $\models_I A_1, \ldots, \models_I A_n$, platí také $\models_I B$. Píšeme $A_1, \ldots, A_n \models B$.
- příklad: $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), P(a) \models Q(a)$
  V libovolné interpretaci, kde jsou pravdivé $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ a $P(a)$, je pravdivá také $Q(a)$, např.
  - lidé, P být člověk, Q být smrtelný, $a =$ Sokrates
  - čísla, P být sudé číslo, Q být beze zbytku dělitelný dvěma, $a = 144$
  - zvířata, P být kosatka, Q být savec, $a =$ kosatka Willy

Tautologie predikátové logiky

Získané z tautologií výrokové logiky:

- nahradíme-li v tautologii výrokové logiky korektně všechny výrokové symboly formulemi predikátové logiky, získáme tautologii predikátové logiky
- příklad: v tautologii výrokové logiky $\models p \vee \neg p$ nahraďme p formulí $\forall x P(x)$, získáme tak tautologii predikátové logiky $\models \forall x P(x) \vee \neg \forall x P(x)$

Specifické pro predikátovou logiku:

- označme $A(x)$ libovolnou formuli obsahující volnou proměnnou x, $A(x, y)$ libovolnou formuli obsahující volné proměnné x a y apod.
- příklady tautologií:
  $\forall x A(x) \Rightarrow A(x/t)$ (zákon konkretizace)
  $A(x/t) \Rightarrow \exists x A(x)$ (zákon abstrakce)

Specifické tautologie predikátové logiky I

- de Morganovy zákony pro kvantifikátory:
  $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
  $\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$
  příklad: negací věty *Na každém hradě straší bílá paní.* $\forall x(H(x) \Rightarrow S(x))$
  je zřejmě *Na některých hradech bílá paní nestraší.*
  $\exists x \neg(H(x) \Rightarrow S(x)) \Leftrightarrow \exists x(H(x) \wedge \neg S(x))$
- zaměnitelnost kvantifikátorů stejného typu (zobecnění komutativity $\wedge$ a $\vee$):
  $\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$
  $\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$
- distributivita kvantifikátorů (zobecnění asociativity $\wedge$ a $\vee$):
  $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x))$
  $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$

Specifické tautologie predikátové logiky II

- vztahy mezi $\forall$ a $\exists$:
  $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$
  (pozn.: požadavek neprázdnosti domény; pro prázdnou doménu jsou např.
  $\forall x P(x)$ i $\forall x \neg P(x)$ pravdivé, ale $\exists x P(x)$ i $\exists x \neg P(x)$ nepravdivé –
  tautologie by tedy neplatila)
  $\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg\exists x \neg A(x)$
  $\exists x A(x) \Leftrightarrow \neg\forall x \neg A(x)$
- zaměnitelnost kvantifikátorů (jednosměrná):
  $\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$
- redukce univerzálního kvantifikátoru:
  $\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall x A(x,x)$
- vztah $\forall$ k disjunkci a $\exists$ ke konjunkci:
  $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$
  $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$

Formální systémy predikátové logiky

- sledujeme stejné cíle (budování teorií) a zajímají nás tytéž vlastnosti (korektnost, úplnost, rozhodnutelnost, nezávislost axiomů) jako v systémech pro výrokovou logiku
- všechny systémy uvedené pro výrokovou logiku lze rozšířit pro predikátovou logiku
- budeme se zabývat rozšířením axiomatického systému a zejména rezolucí

Axiomatický systém predikátové logiky I

- používáme spojky $\{\Rightarrow, \neg\}$ a kvantifikátor $\forall$. Ostatní spojky jsou chápány jako zkratky uvedené ve výr. logice, resp. $\exists x A =_{df} \neg\forall x \neg A$
- axiomy pro spojky (A, B, C jsou formule) – shodné s výr. logikou:
  $\mathbf{A_1}$ $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  $\mathbf{A_2}$ $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  $\mathbf{A_3}$ $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- axiomy pro $\forall$:
  $\mathbf{A_4}$ $\forall x A \Rightarrow A(x/t)$
  $\mathbf{A_5}$ $\forall x(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x B)$, A neobsahuje volně x

Axiomatický systém predikátové logiky II

- axiomy pro rovnost:
  $\mathbf{A_6}\ x = x$
  $\mathbf{A_7}\ (x = y) \Rightarrow (f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$
  $\mathbf{A_8}\ (x = y) \Rightarrow (P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$
- odvozovací pravidla:
  - *modus ponens* (MP, stejné s výr. logikou): z A a $A \Rightarrow B$ odvodíme B pro libovolné formule A, B
  - *generalizace* (PG): z A odvodíme $\forall x A$

Axiomatický systém: příklad

Příklad: důkaz z předpokladu. Ukažte, že pokud je dokazatelná formule $A \Rightarrow B$ a proměnná x není volná v A, pak je dokazatelná i formule $A \Rightarrow \forall x B$.

1.	$\vdash A \Rightarrow B$	předpoklad
2.	$\vdash \forall x(A \Rightarrow B)$	PG(1)
3.	$\vdash \forall x(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x B)$	$\mathbf{A_5}$
4.	$\vdash A \Rightarrow \forall x B$	MP(2,3)

Využití axiomatického systému: teorie

- *teorie:* množina uzavřených formulí $\mathbf{T}$, *model* teorie $\mathbf{T}$: interpretace, v níž je každá formule z $\mathbf{T}$ pravdivá

Příklad: teorie elementární aritmetiky (0, unární funkce následník s, binární $+, *$)

- $\mathbf{Ax_1}\ \forall x \neg(s(x) = 0)$
  $\mathbf{Ax_2}\ \forall x(x + 0 = x)$
  $\mathbf{Ax_3}\ \forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))$
  $\mathbf{Ax_4}\ \forall x(x * 0 = 0)$
  $\mathbf{Ax_5}\ \forall x \forall y(x * s(y) = (x * y) + x)$
- pomocná odvozovací pravidla:
  (PS) je-li $\vdash x = y$, pak $\vdash y = x$ (symetrie $=$)
  (PT) je-li $\vdash x = y$ a $\vdash y = z$, pak $\vdash x = z$ (tranzitivita $=$)
  (PPS) je-li $\vdash x = y$, pak $\vdash s(x) = s(y)$ (přidání s)
  (PVS) je-li $\vdash s(x) = s(y)$, pak $\vdash x = y$ (vypuštění s)

Příklad: dokažte v teorii elementární aritmetiky $s(0) + s(0) = s(s(0))$.

1.	$\vdash \forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))$	$\mathbf{Ax_3}$
2.	$\vdash (\forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))) \Rightarrow (\forall y(s(0) + s(y) = s(s(0) + y)))$	$\mathbf{A_4}$
3.	$\vdash \forall y(s(0) + s(y) = s(s(0) + y))$	MP(1,2)
4.	$\vdash (\forall y(s(0) + s(y) = s(s(0) + y))) \Rightarrow (s(0) + s(0) = s(s(0) + 0))$	$\mathbf{A_4}$
5.	$\vdash s(0) + s(0) = s(s(0) + 0)$	MP(3,4)
6.	$\vdash \forall x(x + 0 = x)$	$\mathbf{Ax_2}$
7.	$\vdash (\forall x(x + 0 = x)) \Rightarrow (s(0) + 0 = s(0))$	$\mathbf{A_4}$
8.	$\vdash s(0) + 0 = s(0)$	MP(6,7)
9.	$\vdash s(s(0) + 0) = s(s(0))$	PPS(8)
10.	$\vdash s(0) + s(0) = s(s(0))$	PT(5,9)