Axiomatické systémy

- (požadované) vlastnosti formálních (axiomatických) systémů:
  - *korektnost (bezespornost)*: je dána výběrem axiomů a odvozovacích pravidel; systém je korektní, nelze-li v něm zároveň odvodit tvrzení i jeho negaci. Ve sporném systému lze odvodit cokoliv. Vyžadována vždy. (Sémantická korektnost: existuje alespoň jeden model.)
  - *úplnost*: připojením neodvoditelné věty k úplnému systému se tento stane sporným. Nevyžadována vždy – úplné jsou pouze velmi jednoduché teorie. (Sémantická úplnost: každé tvrzení pravdivé ve std. interpretaci lze odvodit.)
  - *rozhodnutelnost*: existence algoritmu pro ověření dokazatelnosti libovolné formule. V axiom. systémech podmíněna úplností; zpravidla splněna pouze pro určité třídy formulí.
  - *nezávislost axiomů*: nezávislý axiom nelze odvodit z ostatních axiomů; závislý axiom může být vypuštěn z dané soustavy axiomů

Příklad axiomatického systému II

- *důkaz* A: konečná posloupnost formulí, jejíž každý člen je axiom nebo důsledek MP, jehož předpoklady jsou mezi předchozími členy, a poslední člen je formule A. Je-li A dokazatelná, píšeme $\vdash A$.
- příklad: dokažte $\vdash A \Rightarrow A$ (vpravo jsou komentáře k jednotlivým krokům)

1. $\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$	$\mathbf{A_1}$
2. $\vdash (A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$	$\mathbf{A_2}$
3. $\vdash (A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	MP(1,2)
4. $\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	$\mathbf{A_1}$
5. $\vdash A \Rightarrow A$	MP(3,4)

Formální systémy (výrokové) logiky

- postaveny výhradně na syntaktické bázi: jazyk logiky neinterpretujeme, provádíme s ním pouze syntaktické manipulace – důkazy
- cíl: získat formální teorii jako souhrn dokazatelných formulí – *teorémů*
- formální systém tvoří
  - jazyk + formule (symbolický jazyk výrokové logiky) – bez interpretací
  - *odvozovací pravidla* – operace na formulích umožňující konstrukce důkazů
  - případně *axiomy* – výchozí tvrzení přijímaná bez důkazu; (axiomy spolu s odvozovacími pravidly tvoří *dedukční systém*)
- formální systémy lze rozdělit na
  - axiomatické (méně pravidel)
  - předpokladové (méně axiomů)

Příklad axiomatického systému I

- jazyk: stejný jako jazyk výrokové logiky; primárně používáme systém spojek $\{\Rightarrow, \neg\}$, ostatní spojky jsou chápány jako zkrácené zápisy:
  $A \wedge B =_{df} \neg(A \Rightarrow \neg B), A \vee B =_{df} \neg A \Rightarrow B,$
  $A \Leftrightarrow B =_{df} (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
- axiomy (resp. schémata axiomů; A, B, C jsou formule):
  $\mathbf{A_1}$ $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  $\mathbf{A_2}$ $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  $\mathbf{A_3}$ $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- odvozovací (inferenční) pravidlo *modus ponens (MP)* (pravidlo odloučení): jsou-li z axiomů dokazatelné (odvoditelné) formule A a $A \Rightarrow B$, pak je dokazatelná i B. Zapisujeme též

$$\frac{A \qquad A \Rightarrow B}{B}$$

Gentzenovský systém (kalkul sekventů)

- příklad pravidlového systému formální logiky: pouze nástin, nikoliv úplná definice
- další typ výrazů formálního jazyka: *sekventy (sekvence)*
  $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$,
  kde A_i, B jsou formule, $\vdash$ je symbol odvoditelnosti (dokazatelnosti).
  Posloupnost na levé straně chápeme jako konečnou množinu formulí (budeme ozn. Γ) – nezáleží na pořadí, lze vynechat duplicity, může být prázdná.
- jediný axiom: $\Gamma, A \vdash A$

Gentzenovský systém: důkazy

- důkaz sekventu: strom, v jehož kořeni je dokazovaný sekvent, v listech axiomy a každý uzel (závěr) se svými přímými následníky (předpoklady) představuje instanci některého z pravidel systému
- je-li dokázaný sekvent tvaru $\vdash A$, pak formuli A nazýváme *teorém* (odvoditelná resp. dokazatelná formule)
- systém je korektní a úplný (platí $\vdash A \Leftrightarrow \models A$)
- příklad: důkazu sekventu $\vdash p \vee \neg p$:

$$\dfrac{\dfrac{\neg p \vdash \neg p}{\neg p \vdash p \vee \neg p} \qquad \dfrac{p \vdash p}{p \vdash p \vee \neg p}}{\vdash p \vee \neg p}$$

(použito pravidlo eliminace předpokladu a dvakrát pravidlo zavedení $\vee$)

Vlastnosti uvedného axiomatického systému

- *Věta (korektnost a úplnost)*: A je dokazatelná právě tehdy, když je pravdivá, tj. $\vdash A \Leftrightarrow \models A$
  Důkaz: $\Rightarrow$ (korektnost): ověříme, že axiomy jsou tautologie a jsou-li předp. MP tautologie, pak i důsledek je tautologie (tabulky, věta o implikaci)
  $\Leftarrow$ (úplnost): složitější, na základě pomocných tvrzení (lemma o neutrální formuli a lemma o odvození z atomických komponent)
  Pozn.: věta vystihuje vztah mezi syntaxí a sémantikou výr. logiky
- rozhodnutelnost: neexistuje systematická procedura (jde spíše o "hádání" jednotlivých kroků důkazu), nevhodné pro strojové zpracování. Dokazování lze zjednodušit pomocí dokazatelnosti z předpokladů a syntaktické věty o dedukci ($T, A \vdash B \Leftrightarrow T \vdash A \Rightarrow B$).
- axiomy jsou nezávislé (žádný nelze odvodit ze zbývajících dvou)

Gentzenovský systém: pravidla

- obecné schéma pravidel: $\dfrac{\text{předpoklad}_1 \quad \ldots \quad \text{předpoklad}_n}{\text{závěr}}$
- pravidla zavedení a eliminace předpokladu:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, A \vdash A} \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

- řada pravidel pro spojky (uvedeme pouze některá na ukázku)
  zavedení a eliminace $\vee$:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C \quad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}$$

  zavedení a eliminace $\wedge$:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$