

# Petriho síť

[Obsah](#)

[Obrázky](#)

[Rejstřík](#)

[Dopředu](#)

[Zpět](#)



# Poznámka autora

Tento materiál vznikl podle kurzu *Petriho síť* vyučovaného doc. RNDr. Antonínem Kučerou, Ph.D. v podzimním semestru 2003 na Fakultě informatiky Masarykovy univerzity v Brně. Zdrojem byly především zápisky z přednášek mne a Pavla Šimečka. Na některých místech byly použity materiály poskytnuté Tomášem Kratochvílou.

Protože měl tento materiál sloužit k mé přípravě na zkoušku, dělal jsem vše pro to, aby neobsahoval chyby a nepřesnosti. To však neznamená, že je obsahovat nemůže — nenesu žádnou odpovědnost za škody vzniklé použitím tohoto textu.

Upozornění na chyby, překlepy, špatné formulace, náměty a připomínky, jakož i ocenění, poděkování nebo dotazy na číslo mého účtu pro konkrétnější ocenění můžete poslat na  
holecek [at] informatics.muni.cz

Honza Holeček  
8. 3. 2004

**Obsah**  
**Obrázky**  
**Rejstřík**

**Dopředu**  
**Zpět**

# Obsah

## Základní pojmy

*Definice:* Petriho síť

*Poznámka:* Neprázdnotnost množin míst a přechodů Petriho sítě

*Notace:* Množiny uzlů, které „berou“ a „dávají“ do uzlu Petriho sítě

*Příklad:* Jednoduchá Petriho síť

*Definice:* Označkování, uschopněný přechod

*Poznámka:* Vyjadřovací síla Petriho sítě

*Definice:* Přechodový systém Petriho sítě

*Příklad:* Producent-konzument s neohraničenou vyrovnávací pamětí

*Příklad:* Producent-konzument s ohraničenou vyrovnávací pamětí

*Příklad:* Model chemické reakce

*Příklad:* Systém s omezujícími podmínkami

## Analýza Petriho sítě

*Definice:* Dosažitelné označkování

*Notace:* Množina dosažitelných označkování

*Definice:* Živost přechodu, živost sítě

*Definice:* Mrtvé místo, mrtvý přechod

*Definice:* Problémy pro Petriho síť

Problém dosažitelnosti (reachability)

Problém sub-marking reachability

Problém zero-reachability

Problém single-place zero-reachability

Problém pokrytelnosti

Obsah

Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět

Problém ohraničenosti místa  
Problém  $k$ -ohraničenosti místa  
Problém ohraničenosti sítě  
Problém  $k$ -ohraničenosti sítě  
Problém inkluze množin dosažitelných označování  
Problém rovnosti množin dosažitelných označování  
Problém živosti přechodu  
Problém živosti sítě  
Problém uváznutí sítě (mrtvost sítě)

## **Strom pokrytelnosti**

*Definice:* Rozšířené označování  
*Definice:* Strom pokrytelnosti  
*Poznámka:* Rozhodnutelnost problému pokrytelnosti  
*Příklad:* Strom pokrytelnosti Petriho sítě  
*Lemma:* Nekonečná neklesající podposloupnost  
*Lemma:* Dicksonovo lemma, Dickson's Lemma  
*Věta:* Ukončení konstrukce stromu pokrytelnosti

## **Funkce, které nejsou primitivně rekurzivní**

*Definice:* Ramseova funkce  
*Věta:* Ramseova věta  
*Definice:* Hilbert-Ackermannova funkce

## **Složitost konstrukce stromu pokrytelnosti**

*Věta:* Velikost stromu pokrytelnosti

## **Hierarchie problémů vzhledem k redukci**

*Věta:* Polynomiální ekvivalence reachability problémů  
Redukce single-place zero-reachability na sub-marking reachability

**Obsah**  
**Obrázky**  
**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**

Redukce sub-marking reachability na zero-reachability  
Redukce zero-reachability na reachability  
Redukce reachability na sub-marking reachability  
Redukce zero-reachability na single-place zero-reachability  
*Věta:* Živost sítě a single-place zero-reachability  
*Poznámka:* Ostatní varianty živosti a single-place zero-reachability  
*Věta:* Živost přechodu a dosažitelnost

## Minského stroj

*Definice:* Minského stroj

## Ekvivalence přechodových systémů

*Definice:* Stopy stavu, trace-ekvivalence

*Definice:* Bisimulace, bisimulační ekvivalence

*Poznámka:* Vztah bisimulační ekvivalence a trace-ekvivalence

*Věta:* Nerozhodnutelnost ekvivalencí

*Věta:* Nerozhodnutelnost inkluze a rovnosti množin dosažitelných označkování

## Model-checking Petriho sítí

*Poznámka:* Logiky  $LTL^F$  a  $LTL^G$

*Poznámka:* Sémantika temporálních logik pro Petriho sítě

*Věta:* Nerozhodnutelnost  $LTL^F$

*Věta:* Nerozhodnutelnost **EG**-fragmentu CTL

*Věta:* Nerozhodnutelnost **EF**-fragmentu CTL

*Poznámka:* **EF**-fragment CTL bez zanoření temporálních operátorů

*Poznámka:* „Action-based“ logiky

## Klasické techniky analýzy Petriho sítí

*Poznámka:* Omezení pro klasické techniky analýzy

*Definice:* Incidenční matice

*Definice:* Kroneckerovo delta

*Poznámka:* Notace vektorů, označování jako vektory

*Příklad:* Incidenční matice

*Definice:* Parikův obraz

*Věta:* Nutná podmínka dosažitelnosti

### S-invarianty

*Příklad:* Motivace pro S-invarianty

*Definice:* S-invariant

*Příklad:* Určení S-invariantů

*Věta:* Alternativní definice S-invariantů

*Věta:* Alternativní nutná podmínka dosažitelnosti

*Definice:* Semipozitivní a pozitivní S-invarianty

*Věta:* Nutná podmínka živosti sítě

*Věta:* Postačující podmínka ohraničenosti sítě

### T-invarianty

*Poznámka:* Motivace pro T-invarianty

*Definice:* T-invariant, semipozitivní a pozitivní T-invariant

*Věta:* Alternativní definice T-invariantu

*Věta:* Parikův obraz posloupnosti přechodů jako T-invariant

*Věta:* Nutná podmínka živosti a ohraničenosti — pozitivní T-invariant

*Věta:* Nutná podmínka živosti a ohraničenosti — silná souvislost

### S-systémy

*Definice:* S-systém

*Věta:* Nutná podmínka dosažitelnosti v S-systému — zachování počtu tokenů

*Lemma:* Nutná podmínka silné souvislosti grafu S-systému

Obsah

Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět

*Věta:* Živost S-systémů

*Lemma:* Postačující podmínka dosažitelnosti v S-systému

*Věta:* Ohraničenost živých S-systémů

*Věta:* Dosažitelnost v živém S-systému I

*Věta:* Charakterizace S-invariantů

*Věta:* Dosažitelnost v živém S-systému II

## **T-systémy**

*Definice:* T-systém

*Příklad:* Neohraničený T-systém

*Definice:* Cyklus

*Příklad:* T-systém s cykly

*Věta:* Nutná podmínka dosažitelnosti v T-systému

*Důsledek:* Nutná podmínka neohraničenosti místa v T-systému

*Věta:* Živost T-systémů

*Příklad:* Ilustrace k důkazu charakteristické podmínky živosti T-systémů

*Důsledek:* Složitost problému živosti T-systémů

*Věta:* Charakterizace T-invariantů

*Příklad:* Živý 1-ohraničený T-systém

*Věta:* Ohraničenost živých T-systémů

*Lemma:* Vlastnosti řešení nutné podmínky dosažitelnosti pro T-systémy

*Lemma:* Celočíselné řešení nutné podmínky dosažitelnosti pro T-systémy

*Věta:* Dosažitelnost v živém T-systému

## **Free-choice systémy**

*Definice:* Free-choice systém

*Věta:* Alternativní definice free-choice systémů

*Definice:* Cluster uzlu

*Poznámka:* Clustery v obecné Petriho síti a ve free-choice systému

*Věta:* Rozklad na clustery

*Příklad:* Rozklad na clustery

*Definice:* Stabilní predikáty — sifony a pasti

*Poznámka:* Význam pojmů sifon a past vzhledem k označování

*Věta:* Sifon v uzavřené síti

*Věta:* Postačující podmínka neuváznutí

*Lemma:* Nutná podmínka pro existenci mrtvého přechodu free-choice systému

*Lemma:* Nutná podmínka neživých free-choice systémů

*Věta:* Postačující podmínka živosti free-choice systému

*Poznámka:* Existence největšího sifonu a největší pasti

*Definice:* Alokace, doména

*Lemma:* Nekonečná posloupnost přechodů k alokaci

*Definice:* Alokace bez cyklů vzhledem k množině míst

*Lemma:* Existence alokace bez cyklů v Petriho síti pro danou množinu míst

*Věta:* Nutná podmínka živosti free-choice systému

*Věta:* Commonerova věta

*Důsledek:* Složitost problému živosti a neživosti

**Obsah**

**Obrázky**

**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**



# Seznam obrázků

Příklad jednoduché Petriho sítě  
Model producent-konzument s neomezenou pamětí  
Model producent-konzument s konečnou pamětí  
Model chemické reakce  
Příklad systému s omezujícími podmínkami  
Příklad stromu pokrytelnosti  
Petriho síť pro výpočet  $A_0$  (Hilbert-Ackermannova funkce)  
Petriho síť pro výpočet  $A_{i+1}$  (Hilbert-Ackermannova funkce)  
Redukce sub-marking reachability na zero-reachability  
Redukce zero-reachability na single-place zero-reachability  
Redukce single-place zero-reachability na živost  
Rozdíl mezi bisimulací a trace-ekvivalencí — přechodový systém  
Rozdíl mezi bisimulací a trace-ekvivalencí — Petriho síť  
Nerozhodnutelnost ekvivalencí — redukce Minského stroje  
Rovnost množin označování — redukce instrukcí typu I a II Minského stroje  
Rovnost množin označování — redukce instrukce halt Minského stroje  
Inkluze množin označování — redukce Minského stroje  
Hierarchie temporálních logik vzhledem k vyjadřovací síle  
Model-checking LTL — redukce Minského stroje  
Model-checking **EF**-fragmentu CTL — redukce Minského stroje  
Příklad Petriho sítě a její incidenční matice  
Příklad Petriho sítě a jejích S-invariantů  
Příklad Petriho sítě a výpočtu jejích S-invariantů  
Ilustrace k důkazu nutné podmínky živosti a ohraničenosti  
Příklad neohraničeného T-systému

Obsah

Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět

Příklad T-systému s cykly

Ilustrace k důkazu charakteristické podmínky živosti T-systémů

Příklad živého 1-ohraničeného systému

Clustery v obecné Petriho síti a free-choice systémech

Rozklad Petriho sítě na clustery

**Obsah**

**Obrázky**

**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**

# Základní pojmy

Motivací pro vznik Petriho sítí bylo modelovat řídicí systémy. Neformálně je Petriho síť graf se dvěma typy uzlů (místa a přechody) s násobnými hranami. Hrany jsou přitom pouze mezi uzly různých typů. Obecně žádná další omezení nejsou, zejména tedy nemusí být vyváženy vstupní a výstupní stupně uzlů.

**Definice** (Petriho síť)

*Petriho síť* je trojice  $\mathcal{N} = (P, T, F)$ , kde  $P \neq \emptyset$  je konečná množina míst (*places*),  $T \neq \emptyset$  je konečná množina přechodů (*transitions*) a  $F$  je přechodová funkce (*flow*)

$$F : (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow \mathbb{N}_0$$

**Poznámka** (Neprázdnot množin míst a přechodů Petriho sítě)

Zde jsem se dopustil největší odchylky od poznámek z přednášek, kde toto omezení na Petriho síť nebylo kladeno. Všechny „zajímavé“ sítě jej však jistě splňují. Toto omezení je nutné při analýze free-choice systémů a zavést jej přímo v hlavní definici mi připadalo nejrozsudnější. Platnost ostatních tvrzení tím jistě nebude ovlivněna — jedná se o striktní omezení množiny petriho sítí.

**Notace** (Množiny uzlů, které „berou“ a „dávají“ do uzlu Petriho sítě)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť. Pro každý přechod  $t \in T$  a pro každé místo  $p \in P$  definujeme množiny

$$t^\bullet = \{p \in P \mid F(t, p) > 0\}$$

$${}^\bullet t = \{p \in P \mid F(p, t) > 0\}$$

$$p^\bullet = \{t \in T \mid F(p, t) > 0\}$$

$${}^\bullet p = \{t \in T \mid F(t, p) > 0\}$$

Notace se přirozeně rozšiřuje na množiny přechodů a míst.

Pro místo  $p \in P$  je  $p^\bullet$  neformálně množina přechodů, z nichž místo může získat token, a  ${}^\bullet p$  množina přechodů, do nichž může token odevzdat (viz níže).

**Příklad** (Jednoduchá Petriho síť)

Na následujícím obrázku je příklad jednoduché sítě, kde

$$P = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

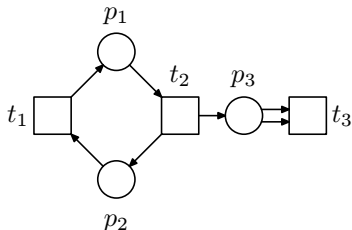
$$F = \{(p_1, t_1, 1), (p_3, t_3, 2), (t_3, p_1, 0, \dots)\}$$

$$F(p_1, t_2) = 1$$

$$F(p_3, t_3) = 2$$

$$F(t_3, p_1) = 0$$

$$\{p_1, p_2\}^\bullet = \{t_1, t_2\}$$



**Definice** (Označkování, uschopněný přechod)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť. *Označkování* (*marking*) je funkce  $M : P \rightarrow \mathbb{N}_0$ . Přechod  $t \in T$  je *uschopněn* v  $M$ , pokud

$$\forall p \in t^\bullet : M(p) \geq F(p, t)$$

Neformálně lze označkování chápat jako distribuci tokenů v síti: udává počet tokenů v jednotlivých místech.

**Poznámka** (Vyjadřovací síla Petriho sítí)

V definici uschopněného přechodu je klíčové použití relace  $\geq$  místo  $=$ . Při použití rovnosti by Petriho sítě byly stejně silné jako Turingovy stroje a mnoho vlastností sítí by bylo nerozhodnutelných. Cílem je přitom umožnit efektivní verifikaci dostatečně velké třídy systémů — s rovností by třída byla příliš velká.

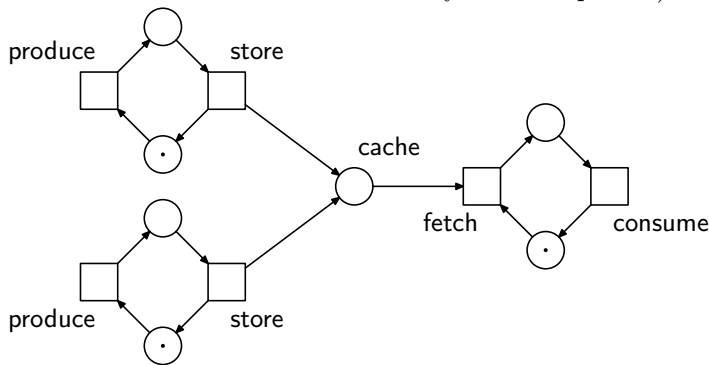
**Definice** (Přechodový systém Petriho sítě)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť a  $\mathcal{A}$  je množina návěstí (abeceda). Nechť je dána funkce  $l : T \rightarrow \mathcal{A}$  přiřazující přechodům ne nutně vzájemně různá návěstí. *Přechodový systém s návěstími* pro Petriho síť  $\mathcal{N}$  s olabelováním  $l$  definujeme jako  $\mathcal{T}_{\mathcal{N}} = (S, \mathcal{A}, \rightarrow)$ ,

kde  $S$  je množina všech označování,  $\rightarrow \subseteq S \times \mathcal{A} \times S$  a  $M \xrightarrow{a} M'$  právě tehdy, když existuje přechod  $t \in T$  uschopněný v  $M$  takový, že  $l(t) = a$  a

$$\forall p \in P : M'(p) = M(p) - F(p, t) + F(t, p)$$

**Příklad** (Producent-konzument s neohraničenou vyrovnávací pamětí)



Význam tokenů je verzatilní. Zatímco v místě *cache* tokeny reprezentují výpočetní zdroje (data), tokeny v ostatních místech udávají tok řízení (uschopňují přechody odpovídající jednotlivým akcím).

Obsah

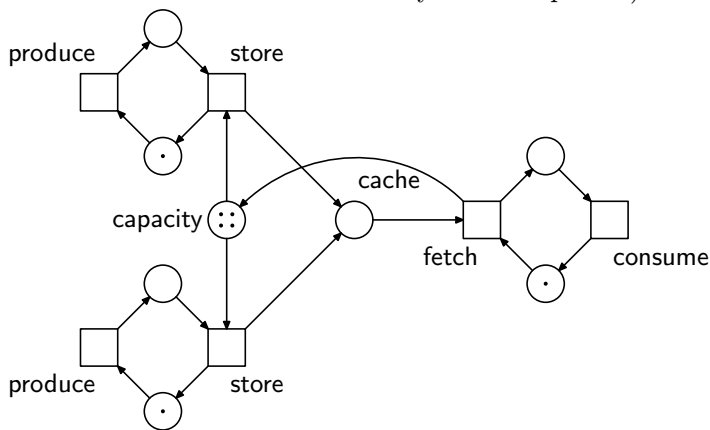
Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět

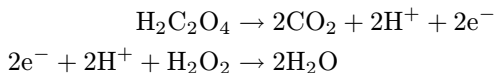
**Příklad** (Producent-konzument s ohraničenou vyrovnávací pamětí)

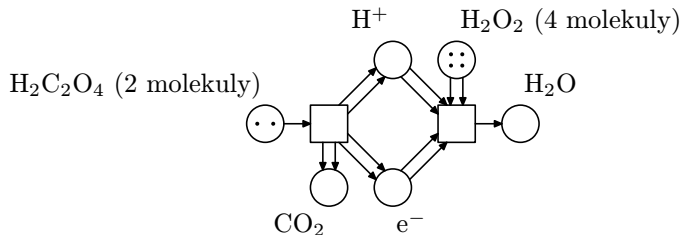


Počet tokenů v místě **capacity** udává velikost volné vyrovnávací paměti. Přechody **store** mohou být odpáleny (provedeny) jen tehdy, pokud je v místě **capacity** alespoň jeden token — v paměti je místo pro uložení. Přechod **fetch** vybírá data z paměti, takže přidává jeden token do místa **capacity**. Iniciální počet tokenů v místě **capacity** udává velikost vyrovnávací paměti.

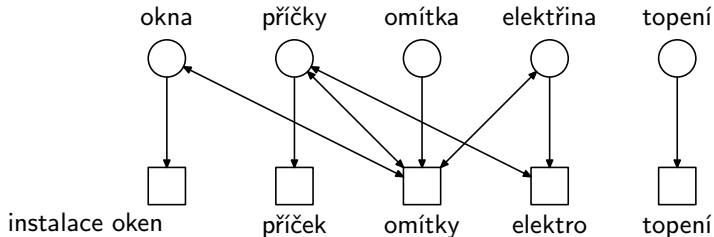
**Příklad** (Model chemické reakce)

Nechť v systému mohou probíhat následující reakce:





### Příklad (Systém s omezujícími podmínkami)

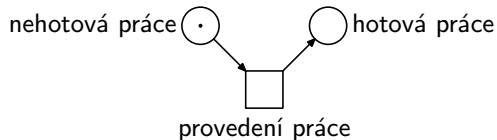


Petriho síť z předcházího obrázku popisuje závislosti mezi jednotlivými pracemi při stavbě domu. Platí-li pro přechod  $t$  a místo  $p$  vztah  $F(p, t) = F(t, p) = 1$ , místo  $p$  tvoří *omezující podmínku* pro přechod  $t$  — odpálení přechodu  $t$  nezmění distribuci tokenů v místě  $p$ , ale vyžaduje přítomnost alespoň jednoho. V některých případech se hovoří o *run-place* hranách.



Ve větším systému je možné analyzovat, zda je projekt realizovatelný (dosažitelnost koncového markingu z iniciálního), které části jsou kritické apod. V tomto případě není nutná ani dosažitelnost (umožňuje specifikovat přesný počet tokenů v daném místě), ale stačí pokrytelnost — v každém místě musí být alespoň nějaký počet tokenů (zde jeden token).

Model lze navíc modifikovat tak, aby v každém místě mohl být nejvýše jeden token. Modifikace je analogická omezení vyrovnávací paměti v modelu producent-konzument.



# Analýza Petriho sítí

Základní problémy řešené u všech formálních modelů jsou dosažitelnost, ukončení a živost. Aby byl model efektivně analyzovatelný, musí být tyto vlastnosti rozhodnutelné. Dalším stupněm je rozhodnutelnost obecnějších temporálních vlastností (formulí temporální logiky) a nejvyšším stupněm je plná formální verifikace (ověření ekvivalence vůči dané specifikaci).

**Definice** (Dosažitelné označování)

Označování  $M'$  je *dosažitelné* z  $M$  v Petriho síti  $\mathcal{N} = (P, T, F)$ , jestliže je v přechodovém systému indukovaném sítí  $\mathcal{N}$  stav  $M'$  dosažitelný z  $M$ .

**Notace** (Množina dosažitelných označování)

Pro Petriho síť  $\mathcal{N}$  a její označování  $M$  definujeme funkci

$$\text{Reach}(\mathcal{N}, M) = \{\text{označování } M' \text{ sítě } \mathcal{N} \mid M' \text{ je dosažitelné z } M\}$$

**Definice** (Živost přechodu, živost sítě)

Buď  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  Petriho síť,  $M_0$  její označování. Přechod  $t \in T$  je *živý* pro  $M_0$ , jestliže pro každé  $M$  dosažitelné z  $M_0$  existuje  $M'$  dosažitelné z  $M$  tak, že  $t$  je uschopněn v  $M$ .

Petriho síť nazveme *živou* pro marking  $M_0$ , pokud je pro  $M_0$  živý každý její přechod.

**Definice** (Mrtvé místo, mrtvý přechod)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť. *Místo*  $p \in P$  se nazývá *mrtvé* v markingu  $M$ , pokud pro všechna označování  $M'$  dosažitelná z  $M$  platí  $M'(s) = 0$ . *Přechod*  $t \in T$  se nazývá *mrtvý*, není-li připravený v žádném označování dosažitelném z  $M$ .

**Definice** (Problémy pro Petriho sítě)

**Problém dosažitelnosti (reachability)**

Instance: Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  a její označování  $M, M'$ .

Otázka: Je označování  $M'$  dosažitelné z  $M$  v  $\mathcal{N}$ ?

**Problém sub-marking reachability**

Instance: Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$ , její označování  $M_0$  a částečné označování  $M$ .

Otázka: Existuje označování  $M'$  sítě  $\mathcal{N}$  dosažitelné z  $M_0$  takové, že kdykoli je pro  $p \in P$  definováno  $M(p)$ , potom  $M'(p) = M(p)$ ?

**Problém zero-reachability**

Instance: Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  a její označování  $M_0$ .

Otázka: Je z  $M_0$  dosažitelné nulové označování sítě  $\mathcal{N}$  (síť neobsahuje žádné tokeny)?

**Problém single-place zero-reachability**

Instance: Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$ , její označování  $M_0$  a místo  $p \in P$ .

Otázka: Je z  $M_0$  v síti  $\mathcal{N}$  dosažitelné označování  $M$  takové, že  $M(p) = 0$ ?

**Problém pokrytelnosti**

Instance: Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  a její označování  $M, M'$

Otázka: Existuje označování  $M''$  dosažitelné v Petriho síti  $\mathcal{N}$  z markingu  $M$  takové, že  $\forall p \in P : M''(p) \geq M'(p)$ ?

**Problém ohraničenosti místa**

Instance: Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$ , její označování  $M$  a místo  $p$

Otázka: Existuje  $k \in \mathbb{N}_0$  takové, že pro každé označování  $M'$  dosažitelné z  $M$  v  $\mathcal{N}$  platí  $M'(p) \leq k$ ?

Obsah

Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět

**Problém  $k$ -ohraničenosti místa**

Instance: Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$ , její označkování  $M$ , místo  $p$  a  $k \in \mathbb{N}_0$

Otázka: Platí pro každé označkování  $M'$  dosažitelné z  $M$  v  $\mathcal{N}$  nerovnost  $M'(p) \leq k$ ?

**Problém ohraničenosti sítě**

Instance: Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  a její označkování  $M$

Otázka: Je každé místo sítě ohrazené? Alternativně (množina míst je konečná): Existuje  $k \in \mathbb{N}_0$  tak, že každé místo je  $k$ -ohrazené?

**Problém  $k$ -ohraničenosti sítě**

Instance: Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$ , její označkování  $M$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$

Otázka: Je každé místo sítě  $k$ -ohrazené?

**Problém inkluze množin dosažitelných označkování**

Instance: Petriho sítě  $\mathcal{N}_1 = (P, T_1, F_1)$ ,  $\mathcal{N}_2 = (P, T_2, F_2)$  nad stejnou množinou míst a jejich počáteční označkování  $M_1$ ,  $M_2$ .

Otázka: Platí  $\text{Reach}(\mathcal{N}_1, M_1) \subseteq \text{Reach}(\mathcal{N}_2, M_2)$ ?

**Problém rovnosti množin dosažitelných označkování**

Instance: Petriho sítě  $\mathcal{N}_1 = (P, T_1, F_1)$ ,  $\mathcal{N}_2 = (P, T_2, F_2)$  nad stejnou množinou míst a jejich počáteční označkování  $M_1$ ,  $M_2$ .

Otázka: Platí  $\text{Reach}(\mathcal{N}_1, M_1) = \text{Reach}(\mathcal{N}_2, M_2)$ ?

**Problém živosti přechodu**

Instance: Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$ , její označkování  $M_0$  a přechod  $t \in T$ .

Otázka: Je přechod  $t$  živý pro  $M_0$  v  $\mathcal{N}$ ?

## **Problém živosti sítě**

Instance: Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  a její označování  $M_0$ .

Otázka: Je síť  $\mathcal{N}$  živá pro  $M_0$ ? (Je živý každý její přechod pro  $M_0$ ?)

## **Problém uváznutí sítě (mrtvost sítě)**

Instance: Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  a její označování  $M_0$ .

Otázka: Existuje pro  $(\mathcal{N}, M_0)$  dosažitelné označování  $M$  takové, že  $(\mathcal{N}, M)$  je mrtvá, tj. není připraven žádný přechod?

**Obsah**

**Obrázky**

**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**

# Strom pokrytelnosti

**Definice** (Rozšířené označkování)

*Rozšířené označkování*  $M$  Petriho sítě  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je funkce  $M : P \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\omega\}$ , kde definujeme  $\forall a \in \mathbb{N}_0$

$$\omega \pm a = \omega$$

$$a < \omega$$

$$\omega \leq \omega$$

**Definice** (Strom pokrytelnosti)

*Strom pokrytelnosti* (*coverability tree*, *Karp-Miller tree*) pro danou Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  a její marking  $M_0$  je strom, který vznikne následující iterativní konstrukcí.

Každý uzel  $x$  stromu pokrytelnosti je ohodnocen právě jedním rozšířeným označováním sítě  $\mathcal{N}$ . V každém okamžiku konstrukce stromu pokrytelnosti má každý uzel právě jeden z následujících módů: hraniční, duplikovaný, vnitřní, koncový. Konstrukce končí, pokud ve stromě nejsou již žádné hraniční uzly.

vytvor hraniční uzel ohodnocený markingem  $M_0$ .

**while** existuje hraniční uzel  $x$  **do**

**if** existuje nehraniční uzel  $y$  takový, že  $M_x = M_y$  **then**

$x$  se stává duplikovaným

**elseif** v  $M_x$  nejsou uschopněny žádné přechody **then**

$x$  se stává koncovým

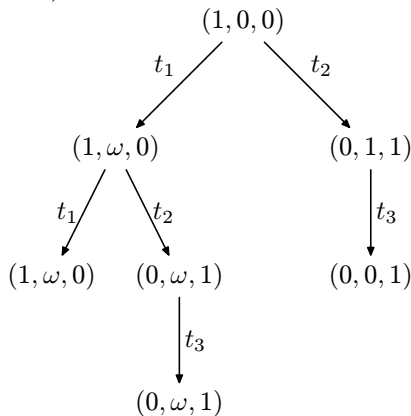
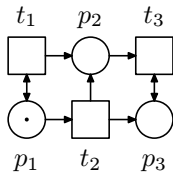
**else**

```
forall přechod  $t$  uschopněný v  $M_x$  do  
  přidej nový hraniční uzel  $z$  jako následníka uzlu  $x$   
  uzlu  $z$  přiřaď marking  $M_z$  definovaný následovně:  
  forall  $p \in P$  do  
    if  $M_x(p) = \omega$  then  
       $M_z(p) = \omega$   
    elseif  
      na cestě z kořene do  $x$  existuje uzel  $y$  tak, že  
       $\forall q \in P : M_y(q) \leq M_x(q) - F(q, t) + F(t, q)$  a  
       $M_y(p) < M_x(p) - F(p, t) + F(t, p)$   
    then  
       $M_z(p) = \omega$   
    else  
       $M_z(p) = M_x(p) - F(p, t) + F(t, p)$   
    fi  
  done  
   $x$  se stává vnitřním  
done  
fi  
done
```

**Poznámka** (Rozhodnutelnost problému pokrytelnosti)

Strom pokrytelnosti umožňuje rozhodovat pokrytelnost a ohraničenost sítě. Neumožňuje však rozhodovat dosažitelnost.

## Příklad (Strom pokrytelnosti Petriho sítě)



## Lemma (Nekonečná neklesající podposloupnost)

Z libovolné nekonečné posloupnosti  $s = s_1, s_2, \dots$  prvků z  $\mathbb{N}_0 \cup \{\omega\}$  lze vybrat nekonečnou neklesající podposloupnost.

*Důkaz:* Pokud posloupnost obsahuje nekonečnou podposloupnost prvků  $\omega$ , pak je to podposloupnost hledaných vlastností. V opačném případě po vynechání všech prvků  $\omega$  dostaneme nekonečnou posloupnost přirozených čísel s nulou. Je-li tato neohraňovaná, pak obsahuje nekonečnou ostře rostoucí podposloupnost, kterou lze vybrat i z původní posloupnosti. Je-li ohraničená, pak obsahuje nějaké přirozené číslo nekonečněkrát a nekonečná podposloupnost tvořená tímto číslem je podposloupnost hledaných vlastností.



**Lemma** (Dicksonovo lemma, Dickson's Lemma)

Z libovolné nekonečné posloupnosti prvků z  $(\mathbb{N}_0 \cup \{\omega\})^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , lze vybrat nekonečnou (po složkách) neklesající podposloupnost.

*Důkaz:* Indukcí vzhledem ke  $k$ . Pro  $k = 1$  dle předchozího lemmatu. Nechť tvrzení platí pro  $k$ , uvažujme případ pro  $k + 1$ . Podle předchozího lemmatu lze vybrat nekonečnou neklesající podposloupnost podle složky  $k + 1$ . Nekonečnou neklesající podposloupnost  $(k+1)$ -tic z ní můžeme vybrat podle indukčního předpokladu, uvažujeme-li pouze prvních  $k$  složek.

**Věta** (Ukončení konstrukce stromu pokrytelnosti)

Algoritmus konstrukce stromu pokrytelnosti vytvoří konečný strom.

*Důkaz:* Protože počet přechodů Petriho sítě je z definice konečný, obsahuje strom pokrytelnosti vždy jen konečné větvení. Pokud by měl být nekonečný, musel by obsahovat nekonečnou větev. Podle důkazu Dicksonova lemmatu však tato větev musí obsahovat buď opakující se uzly nebo ostře rostoucí podposloupnost. V prvním případě bude opakující se uzel označen jako duplicitní, v druhém případě vznikne  $\omega$ . V obou případech dojde k ukončení větve.

**Obsah**

**Obrázky**

**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**

## Funkce, které nejsou primitivně rekurzivní

Obarvíme-li v klice  $\mathcal{K}$  každou hranu náhodně jednou ze dvou barev, vznikne monochromatická klika  $\mathcal{K}$ .

**Definice** (Ramseova funkce)

Funkce  $\mathbf{R} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , kde  $\mathbf{R}(m) = k$ , se nazývá Ramseyova, jestliže při náhodném obarvení hran dvěma barvami v  $\mathcal{K}_k$  vznikne monochromatická klika  $\mathcal{K}_m$ .

**Věta** (Ramseova věta)

Ramseova funkce je definována pro každé  $m \in \mathbb{N}$ . Existuje limita Ramseyovy funkce pro  $m \rightarrow \infty$ .

*Důkaz:* Není snadný a patří do kombinatoriky.

**Definice** (Hilbert-Ackermannova funkce)

Pro každé  $i \in \mathbb{N}_0$  definujme induktivně funkci  $A_i : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} A_0(x) &= 2x + 1 \\ A_{i+1}(0) &= 1 \\ A_{i+1}(x+1) &= A_i(A_{i+1}(x)) = \underbrace{A_i \circ \dots \circ A_i}_{x\text{-krát}}(1) \end{aligned}$$

Funkce  $A_i$  je primitivně rekurzivní pro každé  $i \in \mathbb{N}_0$ , ale počet for-cyklů potřebných pro její výpočet roste s  $i$ . Funkce

$$\mathbf{A}(x) = A_x(2)$$

tedy není primitivně rekurzivní. Důkaz patří do vyčíslitelnosti.

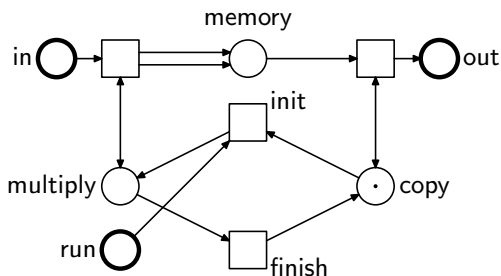
## Složitost konstrukce stromu pokrytelnosti

**Věta** (Velikost stromu pokrytelnosti)

Velikost stromu pokrytelnosti Petriho sítě nelze ohraničit žádnou primitivně rekurzivní funkcí.

*Důkaz:* Pro každé  $i \in \mathbb{N}_0$  sestrojíme Petriho síť a její označování velikosti  $\mathbf{O}(n)$  tak, aby síť počítala Hilbert-Ackermannovu funkci  $A_i$ . Petriho síť definujeme induktivně tak, že každá bude obsahovat místa in, out a run. Vložíme-li  $m$  tokenů do in a jeden token do run, bude existovat takový běh sítě, který skončí s  $A_i(m)$  tokeny v out.

Síť pro  $A_0$



Na počátku lze odpálit pouze přechod *init*, čímž se řídicí token dostane do místa *multiply*, a do paměti *memory* se vloží jeden token, což odpovídá přičtení jedničky. Dokud zůstává řídicí token v *multiply*, je možné násobením dvěma přesouvat tokeny z *in* do *memory*. Jak-



Nyní se  $m$ -krát spustí síť pro  $A_i$ . Dokud je v memory alespoň jeden token, mohou se přemístit tokeny z  $i$ -out do  $i$ -in. Potom se vloží jeden token do  $i$ -run a nechá se počítat síť pro  $A_i$  tak, aby po skončení jejího výpočtu v  $i$ -out bylo  $A_i(x)$  tokenů, kde  $x$  byl počáteční počet tokenů v  $i$ -in. Dokud jsou v memory tokeny, postup se opakuje.

Nakonec se odpálí přechod finish, čímž se řídicí token dostane do copy-out. To umožní přemístit všechny tokeny z  $i$ -out do out.

Pro velikost sítí (velikost grafů a velikost markingů) se vstupem  $m$  platí

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}_{A_0}| &= c + \mathbf{O}(m) \\ |\mathcal{N}_{A_{i+1}}| &= k + |\mathcal{N}_{A_i}| \\ |\mathcal{N}_{A_i}| &= \mathbf{O}(i + m) \end{aligned}$$

Protože je síť ohraničená, při konstrukci stromu pokrytelnosti nevznikne  $\omega$  a je tedy totožný se stromem dosažitelnosti. Do out se navíc tokeny přemísťují po jednom, takže pro síť  $\mathcal{N}_{A_i}$  existuje alespoň  $A_i(m)$  markingů dosažitelných z počátečního markingů s  $m$  tokeny v in. Velikost stromu pokrytelnosti sítě  $\mathcal{N}_{A_i}$  je tedy zdola ohraničena funkcí  $\mathbf{A}(i)$ , tedy je rovna  $\Omega(\mathbf{A}(i+m))$ . Protože  $\mathbf{A}(x)$  není primitivně rekurzivní, nelze velikost stromu pokrytelnosti ohraničit žádnou primitivně rekurzivní funkcí.

# Hierarchie problémů vzhledem k redukci

**Věta** (Polynomiální ekvivalence reachability problémů)

Reachability, zero-reachability, single-place zero-reachability a sub-marking reachability problémy jsou polynomiálně ekvivalentní.

*Důkaz:* Ukážeme následující redukce:

single-place zero-reachability redukuje se na sub-marking reachability (1)

sub-marking reachability redukuje se na zero-reachability (2)

zero-reachability redukuje se na reachability (3)

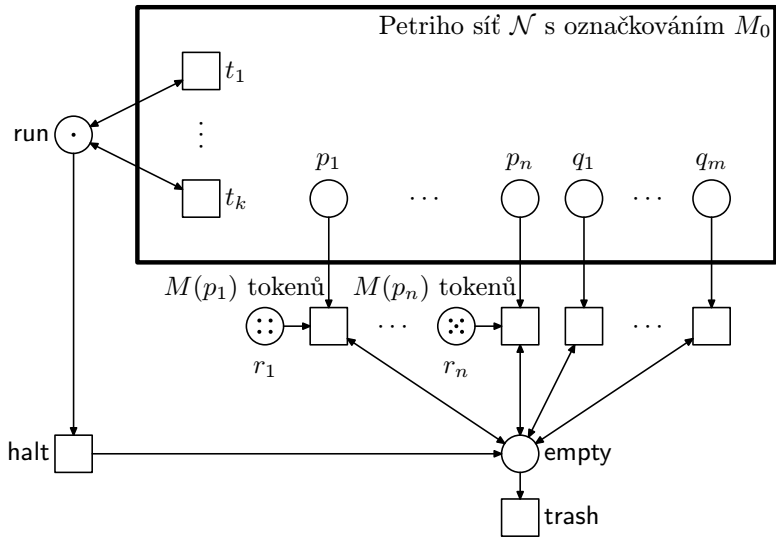
reachability redukuje se na sub-marking reachability (4)

zero-reachability redukuje se na single-place zero-reachability (5)

Vzniknou tedy následující cykly redukci: (1)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  (5) a (2)  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  (4).

**Redukce single-place zero-reachability na sub-marking reachability** Problém single-place zero-reachability je speciálním případem sub-marking-reachability, redukce je triviální.

**Redukce sub-marking reachability na zero-reachability** Mějme instanci problému sub-marking reachability, tedy Petriho síť  $\mathcal{N}$ , její počáteční označování  $M_0$  a částečné označování  $M$ . Označme  $p_1, \dots, p_n$  místa, na nichž je  $M$  definováno, a  $q_1, \dots, q_m$  místa ostatní. Dále označme  $t_1, \dots, t_k$  všechny přechody  $\mathcal{N}$ . Vytvoříme síť  $\mathcal{N}'$  a její počáteční označování  $M'_0$  (instanci problému zero-reachability) následovně:



Dokud je řídicí token v run, provádí síť  $\mathcal{N}'$  výpočet sítě  $\mathcal{N}$ . V určitém okamžiku se  $\mathcal{N}'$  nedeterministicky rozhodne provést přechod halt a ověří se shoda označování sítě  $\mathcal{N}$  se sub-markingem  $M$ . Nakonec se řídicí token zahodí přechodem trash a výpočet končí. Nulový marking je v  $\mathcal{N}'$  dosažitelný právě tehdy, pokud je v síti  $\mathcal{N}$  dosažitelný sub-marking  $M$ . Jinak by nutně zůstaly tokeny buď v  $r_i$  nebo  $p_i$  podle toho, kde by jich bylo více v okamžiku provedení halt.

**Redukce zero-reachability na reachability** Problém zero-reachability je speciálním případem reachability, redukce je triviální.

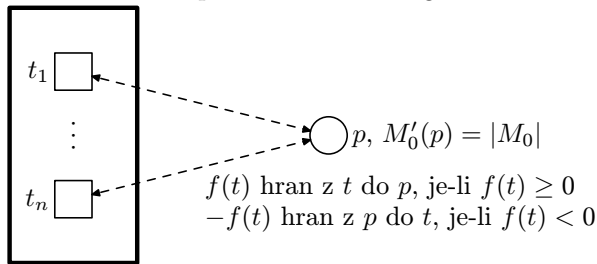
**Redukce reachability na sub-marking reachability** Problém reachability je speciálním případem sub-marking reachability, redukce je triviální.

**Redukce zero-reachability na single-place zero-reachability** Mějme instanci problému zero-reachability, tedy Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  a její označování  $M_0$ . Nechť  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ . Definujme dále funkci  $f : T \rightarrow \mathbb{N}_0$  předpisem

$$f(t) = \sum_{p \in P} (F(t, p) - F(p, t))$$

Funkce  $f$  udává efekt přechodu na celkový počet tokenů v síti. Instanci problému single-place zero-reachability  $\mathcal{N}'$ ,  $M'_0$ ,  $p$ ,  $p \notin P$  vytvoříme takto:

Petriho síť  $\mathcal{N}$  s počátečním markingem  $M_0$



Místo  $p$  slouží jako počítadlo tokenů v síti  $\mathcal{N}$ . Síť  $\mathcal{N}'$  je ekvivalentní síti  $\mathcal{N}$ , ale navíc v  $p$  udržuje počet tokenů ve zbylé části sítě. Pokud ve zbylé části (v síti  $\mathcal{N}$ ) nejsou žádné tokeny, je i místo  $p$  prázdné.

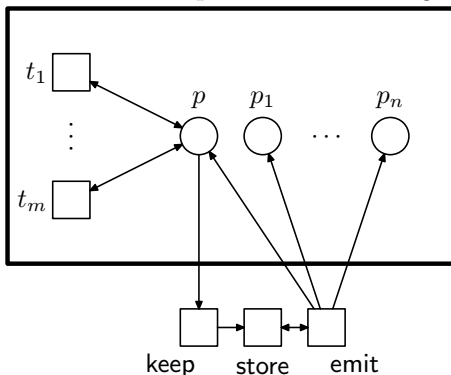


## Věta (Živost sítě a single-place zero-reachability)

Problém single-place zero-reachability je polynomiálně redukovatelný na problém živosti sítě.

*Důkaz:* Nechť Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$ , označování  $M_0$  a  $p \in P$  tvoří instanci problému single-place zero-reachability. Označme  $t_1, \dots, t_m$  všechny přechody sítě  $\mathcal{N}$  a  $p_1, \dots, p_n$  všechna místa sítě  $\mathcal{N}$  kromě místa  $p$ . Instanci  $\mathcal{N}'$ ,  $M_0$  problému živosti sítě vytvoříme tak, že z místa  $p$  přidáme run-place hranu do všech přechodů sítě  $\mathcal{N}$  a dále přechody keep, emit a místo store podle obrázku.

Petriho síť  $\mathcal{N}$  s počátečním markingem  $M_0$



Každý výpočet sítě  $\mathcal{N}$  lze provést i v  $\mathcal{N}'$ . Pokud se zejména může vyprázdnit místo  $p$  v  $\mathcal{N}$  (je dosažitelný příslušný marking), může se vyprázdnit i v  $\mathcal{N}'$  a síť se zastaví kvůli run-place hranám — tedy není živá. Pokud se místo  $p$  naopak vyprázdnit nemůže, vždy lze provést přechod keep, který umístí token do místa store. Je-li v místě store alespoň

Obsah

Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět

jeden token, lze libovolně provádět přechod emit a připravit tak libovolný přechod v  $\mathcal{N}'$  — síť je tedy živá.

**Poznámka** (Ostatní varianty živosti a single-place zero-reachability)

Problém single-place zero-reachability lze analogicky polynomiálně redukovat na problémy neživosti sítě, živosti přechodu i neživosti přechodu. Živost přechodu je speciální případ živosti sítě, lze použít totožnou redukci. Při redukci na neživost sítě by konstrukce byla také totožná, změnila by se jen interpretace výsledků: pokud instance nesplňuje single-place zero-reachability, redukcí vznikne neživá síť; pokud instance splňuje single-place zero-reachability, redukcí vznikne síť, která nebude neživá.

**Věta** (Živost přechodu a dosažitelnost)

Problém živosti přechodu je redukovatelný (v Turingově smyslu — Turingovým strojem s orákulem) na problém dosažitelnosti.

**Obsah**

**Obrázky**

**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**

# Minského stroj

**Definice** (Minského stroj)

*Minského stroj* je posloupnost instrukcí

$$\begin{aligned} l_1 &: \text{Com}_1 \\ &\vdots \\ l_m &: \text{Com}_m \\ l_{m+1} &: \text{halt} \end{aligned}$$

kde každá instrukce  $\text{Com}_i$  je typu I

$$l_i: \text{inc } c_j$$

nebo typu II

$$\begin{aligned} l_i: & \text{if } c_j = 0 \\ & \text{then goto } l_k \\ & \text{else dec } c_j; \text{ goto } l_n \end{aligned}$$

kde  $c_j \in \mathbb{N}_0$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , jsou dva neomezené nezáporné celočíselné registry.

Obsah

Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět

# Ekvivalence přechodových systémů

V této části se budeme zabývat ekvivalencemi přechodových systémů s návěštimi, které jsou indukovány Petriho sítěmi — definujeme několik typů ekvivalencí a ukážeme některé vztahy mezi nimi.

**Definice** (Stopy stavu, trace-ekvivalence)

Nechť  $\mathcal{T} = (S, \mathcal{A}, \rightarrow)$  je přechodový systém. Funkci  $\text{Traces} : S \rightarrow \mathcal{A}^*$  definujeme předpisem

$$\text{Traces}(s) = \{w \in \mathcal{A}^* \mid \exists s' : s \xrightarrow{w} s'\}$$

*Trace-ekvivalenci*  $=_{\text{tr}} \subseteq S \times S$  definujeme předpisem

$$s =_{\text{tr}} t \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Traces}(s) = \text{Traces}(t)$$

**Definice** (Bisimulace, bisimulační ekvivalence)

Nechť  $\mathcal{T} = (S, \mathcal{A}, \rightarrow)$  je přechodový systém. Relaci  $R \subseteq S \times S$  nazveme (*silnou*) *bisimulací*, jestliže pro všechna  $(s, t) \in R$  platí

$$(\forall a \in \mathcal{A})(\forall s', s \xrightarrow{a} s')(\exists t', t \xrightarrow{a} t') : (s', t') \in R$$

$$(\forall a \in \mathcal{A})(\forall t', t \xrightarrow{a} t')(\exists s', s \xrightarrow{a} s') : (s', t') \in R$$

Největší relaci bisimulace  $\sim \subseteq S \times S$  (taková zřejmě existuje) nazveme *bisimulační ekvivalencí*. Zřejmě  $s \sim t$  právě tehdy, když existuje bisimulace  $R$  taková, že  $(s, t) \in R$ .

### Poznámka (Vztah bisimulační ekvivalence a trace-ekvivalence)

Pro každý přechodový systém  $\mathcal{T} = (S, \mathcal{A}, \rightarrow)$  a každé dva jeho stavy  $s, t \in S$  zřejmě platí

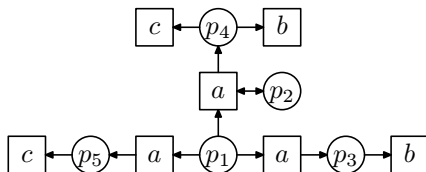
$$s \sim t \Rightarrow s =_{\text{tr}} t$$

Opačná implikace obecně neplatí. Uvažme například přechodový systém na obrázku, který je složen ze dvou částí. Zřejmě  $s_1 =_{\text{tr}} s'_1$ , ale  $s'_2 \neq_{\text{tr}} s_2$  ani  $s'_2 \neq_{\text{tr}} s_3$ , takže trace-ekvivalence není bisimulací.



Takový přechodový systém je součástí přechodového systému generovaného Petriho sítí na následujícím obrázku, kde stavu  $s_1$  odpovídá označkování  $M_1$  a stavu  $s'_1$  označkování  $M'_1$  dané předpisem

$$M_1(p) = \begin{cases} 1 & p = p_1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$
$$M'_1(p) = \begin{cases} 1 & p = p_1 \vee p = p_2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



**Věta** (Nerozhodnutelnost ekvivalenci)

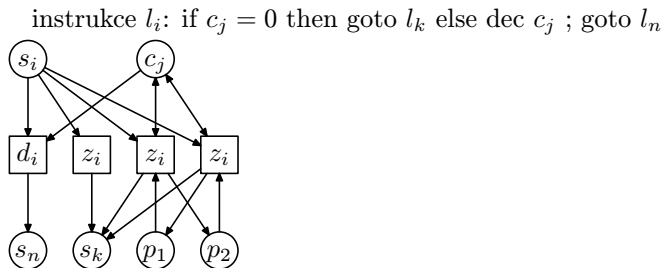
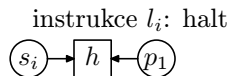
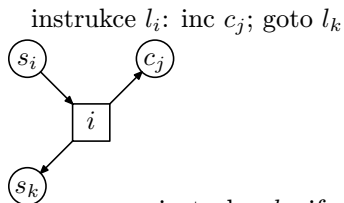
Nechť  $\mathcal{T} = (S, \mathcal{A}, \rightarrow)$  je přechodový systém indukovaný Petriho sítí  $\mathcal{N}$ ,  $\approx_{\subseteq} S \times S$  relace taková, že  $\sim_{\subseteq} \approx_{\subseteq} =_{\text{tr}}$ . Problém, zda dvě daná označování  $M_1$  a  $M_2$  (stavy přechodového systému) splňují  $M_1 \approx M_2$  je nerozhodnutelný.

*Důkaz:* Redukcí (nerozhodnutelného) problému zastavení Minského stroje. Pro daný Minského stroj  $\mathcal{M}$  sestrojíme Petriho síť  $\mathcal{N}$ , její olabelování a dvě označování  $M_1$  a  $M_2$  tak, že

$$\mathcal{M} \text{ nezastaví} \Rightarrow M_1 \sim M_2 \Rightarrow M_1 \approx M_2$$

$$\mathcal{M} \text{ zastaví} \Rightarrow M_1 \neq_{\text{tr}} M_2 \Rightarrow M_1 \not\approx M_2$$

Nechť je tedy dán Minského stroj  $\mathcal{M}$ . Petriho síť definujeme po instrukcích následovně.



Položme

$$M_1(p) = \begin{cases} 1 & p = s_1 \vee p = p_1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$
$$M_2(p) = \begin{cases} 1 & p = s_1 \vee p = p_2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

V takto definované síti odpovídá korektnímu výpočtu právě jeden běh. Ostatní běhy jsou nekorektní v tom smyslu, že některý přechod  $z_i$  byl proveden v okamžiku, kdy příslušný  $c_j$  nebyl nulový.

Nechť  $\mathcal{M}$  nezastaví, nikdy se tedy neprovede instrukce halt. Ani při jednom iniciálním označování se tedy v korektním běhu nemůže provést přechod  $h$ . Ostatní běhy obsahují alespoň jeden nekorektní krok. Uvažme libovolný nekorektní běh z počátečního označování  $M_1$  a v něm první nekorektní krok  $z_i$ . Z markingu  $M_2$  lze přesně simulovat tento běh až k prvnímu nekorektnímu kroku. Místo něj (protože příslušné  $M_1(c_j) = M_2(c_j) \neq 0$ ) lze provést jiný přechod  $z_i$ , kterým se přemístí token z  $p_2$  do  $p_1$  a síť se dostane do identického stavu jako v simulovaném běhu. Symetricky pro simulování běhů z  $M_2$  běhy z  $M_1$ .

Nechť  $\mathcal{M}$  zastaví. V korektním běhu z počátečního označování  $M_1$  je posledním přechodem přechod  $h$ . Při simulaci tohoto běhu z počátečního označování  $M_2$  musí síť provádět pouze korektní kroky, jinak by provedla přechod  $z_i$  místo  $d_i$ . Místo  $p_1$  bude tedy stále prázdné a přechod  $h$  se proto neprovede. Z toho  $\text{Traces}(M_1) \neq \text{Traces}(M_2)$ .

**Věta** (Nerozhodnutelnost inkluze a rovnosti množin dosažitelných označování)  
Problém inkluze a rovnosti množin dosažitelných označování je nerozhodnutelný.

Obsah  
Obrázky  
Rejstřík

Dopředu  
Zpět

*Důkaz:* Redukcí problému zastavení Minského stroje. Pro daný Minského stroj  $\mathcal{M}$  sestrojíme Petriho sítě  $\mathcal{N}_1$  a  $\mathcal{N}_2$  a označování  $M_1$  a  $M_2$  tak, aby následující podmínky byly ekvivalentní

$$\mathcal{M} \text{ nezastaví} \quad (a)$$

$$\text{Reach}(\mathcal{N}_1, M_1) = \text{Reach}(\mathcal{N}_2, M_2) \quad (b)$$

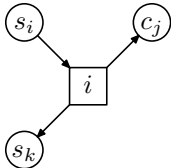
$$\text{Reach}(\mathcal{N}_1, M_1) \subseteq \text{Reach}(\mathcal{N}_2, M_2) \quad (c)$$

Tvrzení dokážeme pomocí tří implikací, přičemž  $(b) \Rightarrow (c)$  platí vždy.

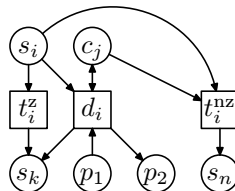
$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$$

Pro důkaz  $(a) \Rightarrow (b)$  redukuje  $\mathcal{M}$  podobně jako v důkazu předchozího tvrzení po instrukcích. Vytvořme tedy sítě  $\mathcal{N}_1$  a  $\mathcal{N}_2$  a označování  $M_1$  a  $M_2$ . I když v tomto případě není olabelování přechodů podstatné, zavedeme jej pro snazší vyjadřování. Části odpovídající instrukcím typu I a II jsou stejné v obou sítích:

instrukce  $l_i$ : inc  $c_j$ ; goto  $l_k$



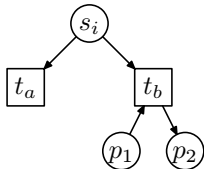
instrukce  $l_i$ : if  $c_j = 0$  then goto  $l_k$  else dec  $c_j$ ; goto  $l_n$



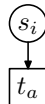


Instrukce  $l_i$ : halt se do sítě  $\mathcal{N}_1$  zakóduje jinak než do  $\mathcal{N}_2$ .

instrukce  $l_i$ : halt v síti  $\mathcal{N}_1$



instrukce  $l_i$ : halt v síti  $\mathcal{N}_2$



Označování definujeme takto (množiny míst jsou stejné v obou sítích):

$$M_1(p) = M_2(p) = \begin{cases} 1 & p = s_1 \vee p = p_1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Jediný rozdíl mezi sítěmi  $\mathcal{N}_1$  a  $\mathcal{N}_2$  je přechod  $t_b$ . Proto

$$\text{Reach}(\mathcal{N}_2, M_2) \subseteq \text{Reach}(\mathcal{N}_1, M_1)$$

zřejmě platí. Nechť  $M \in \text{Reach}(\mathcal{N}_1, M_1)$ . Ukážeme, že potom také  $M \in \text{Reach}(\mathcal{N}_2, M_2)$ . Rozlišíme dva případy.

Pokud lze v  $\mathcal{N}_1$  dosáhnout  $M$  posloupností přechodů, která neobsahuje přechod  $t_b$ , lze tutéž posloupnost provést v síti  $\mathcal{N}_2$  a dosáhnout téhož označování.

Naopak, nechť  $M$  lze v  $\mathcal{N}_1$  dosáhnout pouze takovými posloupnostmi přechodů, které obsahují přechod  $t_b$  (a tento přechod je tam nejvýše jednou, protože se token přesune z  $p_1$  do  $p_2$ ). Protože podle (a) stroj  $\mathcal{M}$  nezastaví, musela síť  $\mathcal{N}_1$  alespoň jednou provést  $t_i^z$  místo  $t_i^{nz}$  (nekorektní krok). Přechod  $d_i$  to být nemohl, protože pak by nebylo možné

**Obsah**

**Obrázky**

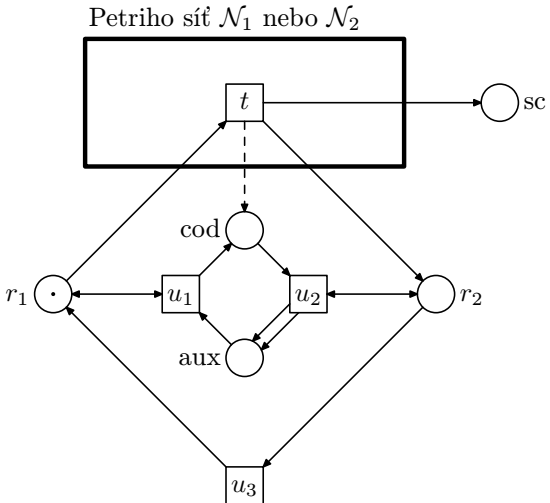
**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**

provést  $t_b$  — v  $p_1$  už by nebyl token. Síť  $\mathcal{N}_2$  místo jednoho takové přechodu mohla provést přechod  $d_i$  a dále se opět chovat jako  $\mathcal{N}_1$ . Protože je v  $\mathcal{N}_2$  již token z  $p_1$  přesunut do  $p_2$ , může  $\mathcal{N}_2$  provést přechod  $t_a$  místo  $t_b$  v síti  $\mathcal{N}_1$  a dostat se tak do téhož označování.

Místo implikace  $(c) \Rightarrow (a)$  dokážeme její obměnu  $\neg(a) \Rightarrow \neg(c)$ . Síť  $\mathcal{N}_1$  a  $\mathcal{N}_2$  z důkazu implikace  $(a) \Rightarrow (b)$  modifikujeme tak, aby síť  $\mathcal{N}_1$  po provedení nekorektního kroku výpočtu již nemohla dosáhnout označování odpovídajícího korektnímu výpočtu. Každý přechod sítí  $\mathcal{N}_1$  a  $\mathcal{N}_2$  kromě  $t_a$  a  $t_b$  modifikujeme podle následujícího obrázku. Přitom přechod  $t$  dává token do místa  $\text{cod}$  (přerušovaná šipka) právě tehdy, když  $t = t_i^{nz}$  pro nějaké  $i$ . Modifikované sítě označme  $\mathcal{N}'_1$  a  $\mathcal{N}'_2$ . Modifikovaná počáteční označování  $M'_1$  a  $M'_2$  jsou totožná s  $M_1$  a  $M_2$  až na přidání token do místa  $r_1$ .



V bězích, které maximalizují počet tokenů v *cod*, dochází v přidáné podsíti k následujícím operacím. Pro každý přechod původní sítě, který je různý od  $t_i^{nz}$  pro všechna  $i$ , je počet tokenů v *cod* zdvojnásoben. Provede-li se v původní síti přechod  $t_i^{nz}$  pro nějaké  $i$ , pak je nejprve jeden token do *cod* přidán a potom je počet zdvojnásoben. Binární zápis počtu tokenů v *cod* tedy udává, kdy byl v posloupnosti přechodů původní sítě proveden přechod  $t_i^{nz}$  pro nějaké  $i$  (a to od prvního provedení takového přechodu).

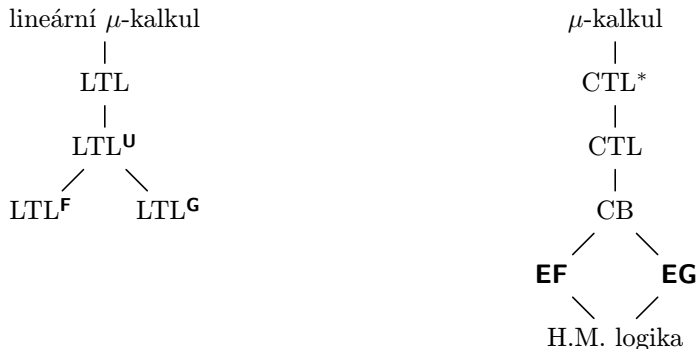
Ukážeme, že existuje označování  $M$  takové, že platí  $M \in \text{Reach}(\mathcal{N}'_1, M_1)$  a zároveň  $M \notin \text{Reach}(\mathcal{N}'_2, M_2)$ . Nechť označování  $M$  odpovídá korektnímu výpočtu sítě  $\mathcal{N}'_1$ , který maximalizuje počet tokenů v *cod*, po provedení přechodu  $t_b$ . Zejména tedy platí  $M(p_1) = 0$  a  $M(p_2) = 1$ . Aby se síť  $\mathcal{N}'_2$  mohla dostat do takového označování, musela někde provést přechod  $d_i$ . Ukážeme, že po provedení takového přechodu se již nikdy nedostane do označování odpovídajícího korektnímu výpočtu.

Síť  $\mathcal{N}'_2$  musela přechod  $d_i$  provést místo nějakého přechodu  $t_i^{nz}$  sítě  $\mathcal{N}'_1$ . Místo přechodu  $t_i^{nz}$  to nebylo možné, protože uvažujeme korektní výpočet sítě  $\mathcal{N}'_1$  — přechod  $t_i^{nz}$  se provádí pouze v případě, že je příslušné místo  $c_j$  prázdné. Zatímco se tedy v  $\mathcal{N}'_1$  přidá do *cod* token a potom se jejich počet vynásobí dvěma, v síti  $\mathcal{N}'_2$  dojde pouze k vynásobení dvěma.

Pokud toto nenastane při prvním provedení některého z přechodů  $t_i^{nz}$  v síti  $\mathcal{N}'_1$ , počty tokenů v *cod* se již nikdy nebudou shodovat — zřejmé z významu jejich binárního zápisu. Pokud to ovšem nastane při prvním provedení některého ze všech  $t_i^{nz}$ , pak by se ještě počty tokenů shodovat mohly, protože místo *cod* sítě  $\mathcal{N}'_2$  zůstává prázdné. Síť  $\mathcal{N}'_2$  tak může provést ještě nějaké výpočty neobsahující žádný přechod  $t_i^{nz}$  a potom přesně simulovat výskyty ne nutně stejných přechodů  $t_i^{nz}$ . V takovém případě se ovšem budou alespoň o jedna lišit počty v místě *sc* — síť  $\mathcal{N}'_2$  musela provést alespoň přechod  $d_i$  navíc.

# Model-checking Petriho sítí

Následující obrázek znázorňuje hierarchii jednotlivých fragmentů temporálních logik vzhledem k vyjadřovací síle.



Ukážeme nerozhodnutelnost model-checkingu pro  $LTL^F$  a  $EG$  a  $EF$  fragmenty  $CTL$ , z čehož bude plynout nerozhodnutelnost všech logik silnějších než některý z těchto fragmentů. Model-checking pro  $LTL^G$  a H.M. logiku je rozhodnutelný.

**Poznámka** (Logiky  $LTL^F$  a  $LTL^G$ )

Fragment  $LTL^F$  obsahuje pouze temporální operátor **F** a negace je omezena pouze na atomické propozice. Fragment  $LTL^G$  má podobně omezenou negaci, z operátorů obsahuje pouze **G**. Temporální operátory **F** a **G** jsou duální, negace proto musí být omezena, aby fragment neobsahoval oba tyto operátory.

Obsah

Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět

## Poznámka (Sémantika temporálních logik pro Petriho sítě)

Sémantika je definována nad přechodovým systémem indukovaným Petriho sítí  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  a jejím počátečním označováním  $M_0$ . Protože u *state-based* logik, kterými se budeme zabývat, nezáleží na návěštích přechodů, jsou všechny indukované přechodové systémy z pohledu temporálních logik totožné.

Sémantiku atomických propozic a jejich valuaci je pro model-checking Petriho sítí nutno omezit, jinak by pomocí vhodně zvolené valuace atomických propozic mohl být nerozhodnutelný i model-checking pouze jediné atomické propozice. Přirozené omezení je následující. Ke každému místu  $s$  Petriho sítě zvolíme (jedinečnou) atomickou propozici  $p_s$ . Valuaci, vzhledem k níž se definuje sémantika logik, definujeme pro atomickou propozici  $p$  a stav přechodového systému (označování)  $M$  takto

$$M \in \nu(p) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists s \in P : p = p_s \wedge M(s) > 0$$

Připomeňme jen, že platnost atomické propozice  $p$  pro běh  $\alpha$  (logiky lineárního času), resp. ve stavu  $M$  (logiky větvičího se času) je definována vztahy

$$\alpha \models p \stackrel{\text{def}}{\iff} \alpha(0) \in \nu(p) \quad (\text{LTL})$$

$$M \models p \stackrel{\text{def}}{\iff} M \in \nu(p) \quad (\text{CTL})$$

kde  $\alpha(0)$  je počáteční stav běhu  $\alpha$  a  $\nu$  je funkce přiřazující atomickým propozicím množinu stavů, v nichž platí.

Je-li sémantika definována uvedeným způsobem a platí-li formule  $\neg p_s$  ve stavu  $M$ , znamená to, že  $M(s) = 0$ .

Obsah

Obrázky

Rejstřík

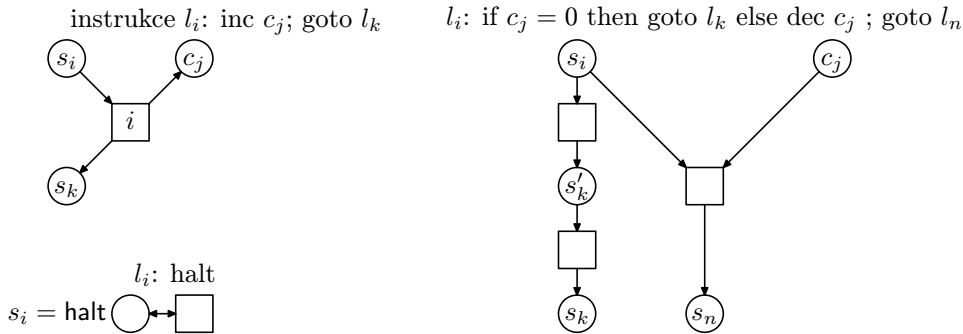
Dopředu

Zpět

## Věta (Nerozhodnutelnost LTL<sup>F</sup>)

Model-checking LTL<sup>F</sup> vlastností je pro Petriho sítě nerozhodnutelný.

*Důkaz:* Redukcí problému zastavení Minského stroje. Konstrukce Petriho sítě  $\mathcal{N}$  a jejího počátečního markingu  $M_0$  bude podobná jako v předchozích případech — transformace jednotlivých instrukcí je na následujícím obrázku. Počáteční marking bude mít pouze jeden token v místě  $s_1$ .



Instrukce halt byla modifikována tak, aby korektní běh systému byl nekonečný. Do sítě byly přidány stavy  $s'_k$ , aby bylo možné LTL formulí rozpoznat běhy, které neodpovídají korektnímu výpočtu simulovaného Minského stroje. Tato formule, označme ji  $\psi$ , má tvar

$$\psi \equiv \bigvee_{\text{instrukce typu 2}} (p_{c_j} \wedge p'_{k_i})$$

Definujme nyní formuli  $\varphi$  takto

$$\varphi \equiv \mathbf{F}(p_{\text{halt}} \vee \psi)$$

Obsah

Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět

Pro každý běh  $\alpha$  začínající v  $M_0$  platí  $\alpha \models \varphi$  právě tehdy, když simulovaný Minského stroj zastaví. Model-checking této vlastnosti je tedy nerozhodnutelný.

**Věta** (Nerozhodnutelnost **EG**-fragmentu CTL)

Model-checking vlastností **EG**-fragmentu CTL je pro Petriho sítě nerozhodnutelný.

*Důkaz:* **EG**-fragment CTL obsahuje duální operátor **AF**, je tedy nerozhodnutelný ze stejného důvodu jako **LTL<sup>F</sup>**.

**Věta** (Nerozhodnutelnost **EF**-fragmentu CTL)

Model-checking vlastností **EF**-fragmentu CTL je pro Petriho sítě nerozhodnutelný.

*Důkaz:* Důkaz provedeme redukcí problému inkluze množin dosažitelných označování. Pro dané sítě  $\mathcal{N}_1 = (P, T_1, F_1)$  a  $\mathcal{N}_2 = (P, T_2, F_2)$  a jejich počáteční označování  $M_1$  a  $M_2$  definujeme síť  $\mathcal{N}$  s počátečním označováním  $M_0$  a vlastnost  $\varphi$  **EF**-fragmentu CTL tak, aby  $M_0 \models \varphi$  právě tehdy, když  $\text{Reach}(\mathcal{N}_1, M_1) \subseteq \text{Reach}(\mathcal{N}_2, M_2)$ . Nechť  $T_1 = \{u_1, \dots, u_m\}$ ,  $T_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$  a  $P = \{s_1, \dots, s_l\}$ . Konstrukce  $\mathcal{N}$  a definice  $M_0$  je znázorněna na následujícím obrázku.

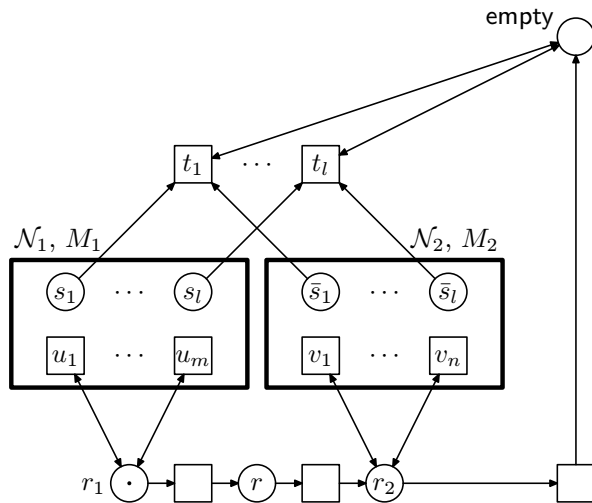
Obsah

Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět



Sítě  $\mathcal{N}_1$  a  $\mathcal{N}_2$  byly spojeny pomocí čtyř run-place míst  $r_1$ ,  $r$ ,  $r_2$  a empty. Dokud je řídicí token v  $r_1$ , počítá  $\mathcal{N}_1$ . Jakmile se řídicí token přemístí do  $r$ , síť  $\mathcal{N}_1$  už nebude moci provést žádný přechod. Místo  $r$  je přidáno z jediného důvodu — aby bylo možno formulí určit okamžik, kdy přestala počítat  $\mathcal{N}_1$  a začne počítat  $\mathcal{N}_2$ . Z místa  $r$  se token musí okamžitě přesunout do  $r_2$ , čímž se umožní běh sítě  $\mathcal{N}_2$ , která se „snaží“ dostat do stejného označování, v jakém se nachází  $\mathcal{N}_1$ . Ve vhodném okamžiku se řídicí token přesune do empty, v němž se srovnají označování sítě  $\mathcal{N}_1$  a  $\mathcal{N}_2$ . Protože v logice je k dispozici pouze test na prázdnotu místa, umožňuje konstrukce vyprázdnit všechna místa  $s_1, \dots, s_l$  právě tehdy, pokud jsou označování totožná.



Pro formulí  $\varphi$ ,

$$\varphi \equiv \mathbf{AG}(p_r \Rightarrow \mathbf{EF}(\bigwedge_{i=1}^l (\neg s_i \wedge \neg \bar{s}_i)))$$

platí  $M_0 \models \varphi$  právě tehdy, když  $\text{Reach}(\mathcal{N}_1, M_1) \subseteq \text{Reach}(\mathcal{N}_2, M_2)$ .

**Poznámka** (**EF**-fragment CTL bez zanoření temporálních operátorů)

Formule  $\varphi$  z předchozího důkazu má zanořené temporální operátory. Vlastnosti **EF**-fragmentu CTL bez zanořených temporálních operátorů jsou pro Petriho sítě rozhodnutelné.

**Poznámka** („Action-based“ logiky)

V předchozí části jsme se zabývali tzv. state-based logikami. Pro *action-based logiky*, v nichž sémantika není definována nad stavy, ale nad návěštími přechodů, jsou výsledky podobné s výjimkou LTL, která je pro action-based logiky rozhodnutelná.

# Klasické techniky analýzy Petriho sítí

**Poznámka** (Omezení pro klasické techniky analýzy)

Pro účely této kapitoly se omezíme pouze na sítě bez násobných hran a se slabě souvislým grafem. Ve všech dalších definicích a tvrzeních budeme tedy předpokládat, že Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  splňuje

$$F : P \times T \cup T \times P \rightarrow \{0, 1\}$$

a má slabě, tj. bez ohledu na orientaci hran, souvislý graf.

**Definice** (Incidenční matice)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť. *Incidenční maticí*  $\mathbf{N} : P \times T \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  rozumíme funkci udávající efekt přechodu  $t \in T$  na místo  $p \in P$ , tj. danou vztahem

$$\mathbf{N}(p, t) = F(t, p) - F(p, t)$$

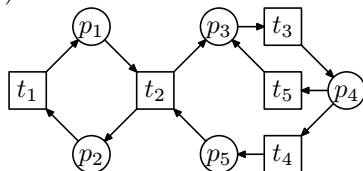
**Definice** (Kroneckerovo delta)

Pro snadnější zápis některých vztahů je vhodné zvést tzv. *Kroneckerovo delta*, funkci definovanou vztahem

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

**Poznámka** (Notace vektorů, označování jako vektory)

Tato kapitola využívá aparát lineární algebry. Budeme používat následující konvence. Vektory budeme chápat jako sloupcové matice, které budeme často zapisovat parametrizovaně  $\vec{u} = (u_i)_{i=1}^n$ . Označování budeme formálně chápat jako vektory  $M = (M(p))_{p \in P}$ , kde  $P$  je množina míst.

**Příklad** (Incidenční matice)

Pro síť z předchozího obrázku má incidenční matice tvar

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$
$s_1$	1	-1	0	0	0
$s_2$	-1	1	0	0	0
$s_3$	0	1	-1	0	1
$s_4$	0	0	1	-1	-1
$s_5$	0	-1	0	1	0

Pokud  $N(p, t) = 0$ , neznamená to, že by mezi  $p$  a  $t$  nevedla žádná hrana, ale že počet hran z místa  $p$  do přechodu  $t$  je roven počtu hran z  $t$  do  $p$ . Protože uvažujeme pouze síť bez násobných hran, může tento počet být buď 0 nebo 1.

Nechť  $t_i \in T$  je připraven při označkování  $M$ . Všimněme si, že platí

$$M \xrightarrow{t_i} M' \Leftrightarrow M' = M + \mathbf{N} \cdot (\delta_{ij})_{j=1}^n$$

**Definice** (Parikův obraz)

Buď  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  Petriho síť, kde  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ . Nechť  $\sigma \in T^*$  je posloupnost přechodů. *Parikovým obrazem* posloupnosti  $\sigma$  rozumíme vektor

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)^T$$

kde  $\sigma_i$  je počet výskytů  $t_i$  v  $\sigma$ .

**Věta** (Nutná podmínka dosažitelnosti)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť s incidenční maticí  $\mathbf{N}$ . Nechť označování  $M'$  je dosažitelné z  $M$ ,  $M \xrightarrow{\sigma} M'$ , kde  $\sigma \in T^*$ . Potom existuje řešení rovnice

$$M' = M + \mathbf{N}X$$

a řešením je i  $\vec{\sigma}$ .

*Důkaz:* Nechť  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ . Ukážeme-li, že  $\vec{\sigma}$  je řešením uvedené rovnice, bude tím zároveň dokázána i existence řešení. Indukcí vzhledem k délce posloupnosti přechodů  $\sigma$ . Pro  $\sigma = \varepsilon$  je  $\vec{\sigma} = 0$ , tedy  $\mathbf{N}\vec{\sigma} = 0$  a skutečně  $M' = M$ .

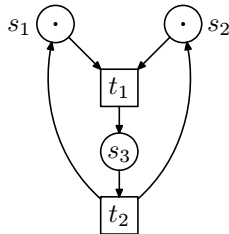
Uvažme nyní  $M \xrightarrow{\sigma} M' \xrightarrow{t_i} M''$  a označme  $\varrho = \sigma t_i$ . Tedy  $\vec{\varrho} = \vec{\sigma} + (\delta_{ij})_{j=1}^n$ . Z indukčního předpokladu platí  $M' = M + \mathbf{N}\vec{\sigma}$ . Efekt přechodu  $t_i$  na označování  $M'$  je určen vektorem  $(\mathbf{N}(p, t_i))_{p \in P} = \mathbf{N} \cdot (\delta_{ij})_{j=1}^n$ . Celkem platí

$$\begin{aligned} M'' &= M' + \mathbf{N} \cdot (\delta_{ij})_{j=1}^n \\ &= M + \mathbf{N}\vec{\sigma} + \mathbf{N} \cdot (\delta_{ij})_{j=1}^n \\ &= M + \mathbf{N} \cdot (\vec{\sigma} + (\delta_{ij})_{j=1}^n) \\ &= M + \mathbf{N}\vec{\varrho} \end{aligned}$$

## S-invarianty

### Příklad (Motivace pro S-invarianty)

S-invarianty jsou vlastně globální vlastnosti sítí. Neformálně se jedná o vektor určující váhy jednotlivých míst tak, aby vážené součty označkování dosažitelných z daného iniciačního markingu byly stejné. Písmeno „S“ značí, že S-invarianty vypovídají o stavech (z německého *die Stelle*). Pro síť na následujícím obrázku jsou S-invarianty například vektory  $(1, 1, 2)^T$ ,  $(1, 0, 1)^T$ ,  $(0, 1, 1)^T$ ,  $(0, 0, 0)^T$ .



Přitom nulový vektor je S-invariantem pro každou síť. Povolíme-li jako váhy (koeficienty) racionální čísla nebo libovolné jiné pole  $\mathbb{P}$ , budou S-invarianty sítě s  $n$  místy tvořit vektorový podprostor  $\mathbb{P}^n$  — jsou uzavřeny na násobení skalárem i součet.

Uvedená intuitivní definice nevypovídá nic o tom, jak S-invarianty vytvořit pro danou síť. Proto se definují jinak.

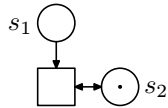
**Definice** (S-invariant)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť s incidenční maticí  $\mathbf{N}$ . Vektor  $I \in \mathbb{Q}^{|P|}$  nazveme *S-invariant*, jestliže  $I$  je řešením rovnice

$$X^T \cdot \mathbf{N} = 0^T$$

**Příklad** (Určení S-invariantů)

Mějme (mrtvou) síť danou následujícím obrázkem



Incidenční matice této sítě je  $\mathbf{N} = (0, -1)^T$ . S-invarianty jsou tedy řešením rovnice

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (0, 0)$$

$$-x_2 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$I \in \{(k, 0)^T \mid k \in \mathbb{Q}\}$$

Vzhledem k intuitivní definici S-invariantů by však každý vektor  $I \in \mathbb{Q}^2$  měl být S-invariantem, protože síť je mrtvá — má pouze jediné dosažitelné označkování. Formální definice nepokrývá všechny S-invarianty podle intuitivní definice. Řešení rovnice z formální definice totiž nejsou na rozdíl od intuitivní definice závislá na iniciálním markingu — jsou to S-invarianty pro každé počáteční označkování. Omezením se na konkrétní iniciální označkování a markingy z něj dosažitelné, se množina uvažovaných označkování zmenší a proto se může zvětšit množina S-invariantů.

**Věta** (Alternativní definice S-invariantů)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť. Vektor  $I \in \mathbb{Q}^{|P|}$  je S-invariant sítě  $\mathcal{N}$  právě tehdy, když  $\forall t \in T$  platí

$$\sum_{s \in \bullet t} I(s) = \sum_{s \in t^\bullet} I(s)$$

kde  $I(s)$  je složka vektoru  $I$  pro místo  $s$ , tj. žádný přechod nezmění vážený součet označkování.

*Důkaz:* Nechť  $I$  je řešením rovnice  $X^T \mathbf{N} = 0^T$ , kde  $\mathbf{N}$  je incidenční matice sítě  $\mathcal{N}$ . Označme  $\vec{t}_j$   $j$ -tý sloupec  $\mathbf{N}$ . Vektor  $I$  je S-invariant právě tehdy, když  $I^T \vec{t}_j = 0$  pro každé  $j$ . Rozepišme levou stranu rovnosti. Nechť  $|P| = m$ .

$$\begin{aligned} I^T \vec{t}_j &= \sum_{i=1}^m I(s_i) \mathbf{N}(s_i, t_j) = \sum_{i=1}^m I(s_i) (F(t_j, s_i) - F(s_i, t_j)) \\ &= \sum_{i=1}^m I(s_i) F(t_j, s_i) - \sum_{i=1}^m I(s_i) F(s_i, t_j) \end{aligned}$$

Protože síť podle předpokladů neobsahuje násobné hrany, pro všechna  $i$  platí  $F(t_j, s_i) \in \{0, 1\}$  a  $F(s_i, t_j) \in \{0, 1\}$ , přičemž

$$F(t_j, s_i) = 1 \Leftrightarrow s_i \in t^\bullet$$

$$F(s_i, t_j) = 1 \Leftrightarrow s_i \in \bullet t$$

odkud

$$\sum_{i=1}^m I(s_i) F(t_j, s_i) = \sum_{s \in t_j^\bullet} I(s)$$

**Obsah**

**Obrázky**

**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**

$$\sum_{i=1}^m I(s_i)F(s_i, t_j) = \sum_{s \in \bullet t_j} I(s)$$

Celkem dostáváme pro každé  $t_j \in T$

$$0 = I^T \vec{t}_j = \sum_{s \in t_j^\bullet} I(s) - \sum_{s \in \bullet t_j} I(s)$$

Vektor  $I$  je tedy S-invariant právě tehdy, když pro všechna  $t_j \in T$  platí

$$\sum_{s \in \bullet t_j} I(s) = \sum_{s \in t_j^\bullet} I(s)$$

**Věta** (Alternativní nutná podmínka dosažitelnosti)

Pro Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  s iniciálním markingem  $M_0$  a incidenční maticí  $\mathbf{N}$  jsou následující podmínky ekvivalentní

$$\text{pro každý S-invariant } I \text{ platí } I^T M_0 = I^T M \tag{a}$$

$$\text{rovnice } M_0 + \mathbf{N}X = M \text{ má řešení v } \mathbb{Q} \tag{b}$$

*Důkaz:* (b)  $\Rightarrow$  (a) Nechť  $I$  je libovolný S-invariant sítě  $\mathcal{N}$ , tedy platí  $I^T N = 0^T$ . Tedy

$$M = M_0 + \mathbf{N}X$$

$$I^T M = I^T (M_0 + \mathbf{N}X) = I^T M_0 + I^T \mathbf{N}X = I^T M_0 + 0^T X$$

$$I^T M = I^T M_0$$

Obsah

Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět



(a)  $\Rightarrow$  (b) S-invarianty jsou řešením rovnice  $X^T N = 0^T$ . Nechť  $I_1, \dots, I_n$  je báze prostoru řešení této rovnice. Pokud  $n = 0$ , neexistuje žádný S-invariant a implikace platí triviálně. Nechť tedy  $n > 0$ .

Označme  $A = (I_i^T)_{i=1}^n$  matici, jejíž řádky tvoří jednotlivé bázové S-invarianty. Tedy platí  $A \cdot N = 0$  a sloupce matice  $N$  generují prostor řešení rovnice

$$AX = 0$$

Je-li totiž  $m$  velikost největší lineárně nezávislé množiny tvořené sloupci  $N$ , potom  $n = |P| - m$ . Protože řádky matice  $A$  jsou tvořeny bází, jsou lineárně nezávislé a dimenze prostoru řešení rovnice  $AX = 0$  je  $|P| - n = m$ . Přitom každý sloupec  $N$  je řešením a je mezi nimi  $m$  lineárně nezávislých — báze prostoru řešení.

Podle (a) pro všechna  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , platí

$$\begin{aligned} I_i^T M_0 &= I_i^T M \\ I_i^T (M_0 - M) &= 0 \\ A(M - M_0) &= 0 \end{aligned}$$

Vektor  $M - M_0$  je tedy řešením rovnice  $AX = 0$  a lze jej proto vyjádřit jako lineární kombinace sloupců  $N$ , které tento prostor generují. Pro vhodné  $R$  tedy platí

$$M - M_0 = NR \quad \Rightarrow \quad M = M_0 + NR$$

Poslední rovnost lze chápat i tak, že  $R$  je řešením rovnice

$$M = M_0 + NX$$

**Definice** (Semipozitivní a pozitivní S-invarianty)

S-invariant  $I$  sítě  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  se nazývá *semipozitivní*, jestliže  $I(s) \geq 0$  pro všechna  $s \in P$  a existuje  $s_0 \in P$  takové, že  $I(s_0) > 0$ . S-invariant  $I$  se nazývá *pozitivní*, jestliže  $I(s) > 0$  pro všechna  $s \in P$ .

**Věta** (Nutná podmínka živosti sítě)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť s počátečním označováním  $M_0$ . Je-li  $(\mathcal{N}, M_0)$  živá, pak pro každý semipozitivní S-invariant  $I$  platí

$$I^T M_0 > 0$$

*Důkaz:* Síť  $\mathcal{N}$  je živá, jestliže pro každý dosažitelný marking  $M$  a každý přechod  $t \in T$  existuje marking  $M'$  dosažitelný z  $M$ , v němž je  $t$  uschopněný. Předpokládejme nyní sporem, že  $I^T M_0 = 0$ . Příklad  $I^T M_0 < 0$  nemůže nastat, protože pro všechna  $s \in P$  platí  $I(s) \geq 0$  z předpokladu a  $M_0(s) \geq 0$  z definice.

Protože  $I$  je semipozitivní, existuje  $s_0 \in P$  takové, že  $I(s_0) > 0$ . Neboť uvažujeme pouze síť se slabě souvislým grafem, existuje přechod  $t \in T$  takový, že  $t \in \bullet s_0$  nebo  $t \in s_0 \bullet$ . Síť  $\mathcal{N}$  je živá, tedy existuje označování  $M$  dosažitelné z  $M_0$ , v němž je přechod  $t$  uschopněn. Označíme-li  $M'$  označování, do nějž se síť dostane z označování  $M$  provedením přechodu  $t$ , potom  $I^T M > 0$  nebo  $I^T M' > 0$ , protože  $M(s_0) > 0$  nebo  $M'(s_0) > 0$ . Tedy  $I$  není S-invariant — spor.

**Věta** (Postačující podmínka ohraničenosti sítě)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť. Má-li  $\mathcal{N}$  pozitivní S-invariant, pak je ohraničená pro všechna počátení označování.

*Důkaz:* Sporem. Nechť má síť pozitivní S-invariant  $I$ , ale není ohraničená, tj. existuje neohraničené místo  $p \in P$ . Nechť  $M$  je označování sítě. Protože  $p$  není ohraničené,

existuje dosažitelný marking  $M'$  takový, že

$$M'(p) > \frac{I^T M}{I(p)}$$

Potom, protože  $I$  je pozitivní, a místa nemohou obsahovat záporný počet tokenů, platí

$$I^T M' \geq I(p)M'(p) > I^T M$$

Tedy  $I$  není S-invariant — spor.

**Obsah**

**Obrázky**

**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**

## T-invarianty

**Poznámka** (Motivace pro T-invarianty)

S-invarianty jsou definovány jako řešení rovnice  $X^T \mathbf{N} = 0^T$ . Je přirozené zajímat se o vlastnosti řešení duální rovnice  $\mathbf{N}X = 0$  a pokusit se je interpretovat.

**Definice** (T-invariant, semipozitivní a pozitivní T-invariant)

*T-invariantem* Petriho sítě  $\mathcal{N}$  s incidenční maticí  $\mathbf{N}$  nazveme každé řešení v  $\mathbb{Q}$  rovnice

$$\mathbf{N}X = 0$$

T-invariant  $J$  se nazývá *semipozitivní*, jestliže  $J(t) \geq 0$  pro všechna  $t \in T$  a existuje  $t_0 \in T$ , pro nějž  $J(t_0) > 0$ . T-invariant  $J$  se nazývá *pozitivní*, jestliže  $J(t) > 0$  pro všechna  $t \in T$ .

**Věta** (Alternativní definice T-invariantu)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť. Funkce  $J : T \rightarrow \mathbb{Q}$  je T-invariant právě tehdy, když pro každé místo  $p \in P$  platí

$$\sum_{t \in \bullet p} J(t) = \sum_{t \in p \bullet} J(t)$$

*Důkaz:* Důkaz je analogický důkazu alternativní definice S-invariantu.

**Věta** (Parikův obraz posloupnosti přechodů jako T-invariant)

Nechť je posloupnost přechodů  $\sigma \in T^*$  proveditelná v síti  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  z označování  $M$ . Pak  $\vec{\sigma}$  je T-invariant právě tehdy, když  $M \xrightarrow{\sigma} M$ .

*Důkaz:* Přímý důsledek nutné podmínky dosažitelnosti.

**Věta** (Nutná podmínka živosti a ohraničenosti — pozitivní T-invariant)

Nechť je Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  s iniciálním markingem  $M_0$  živá a ohraničená. Potom existuje pozitivní T-invariant sítě  $\mathcal{N}$ .

*Důkaz:* Protože  $(\mathcal{N}, M_0)$  je živá, lze z každého označování připravit libovolný přechod. Z každého označování tedy existuje proveditelná posloupnost přechodů, která obsahuje každý přechod alespoň jednou. Definujme rekurzivně označování  $M_i$ ,  $0 \leq i$ . Označování  $M_0$  je počáteční označování sítě. Označování  $M_{i+1}$  vznikne posloupností přechodů  $\sigma_i$  z označování  $M_i$ , kde  $\sigma_i$  obsahuje každý přechod alespoň jednou.

Protože  $(\mathcal{N}, M_0)$  je ohraničená, existuje pouze konečně mnoho různých označování, označme jejich počet  $n$ . Mezi výše definovanými označováními  $M_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , tedy musí být alespoň dvě totožná. Nechť  $M_{i_1} = M_{i_2}$ ,  $i_1 < i_2$ . Potom

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_{i_1} + \cdots + \vec{\sigma}_{i_2-1}$$

je pozitivní T-invariant.

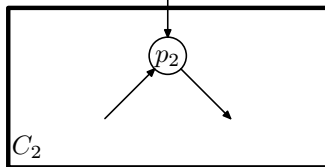
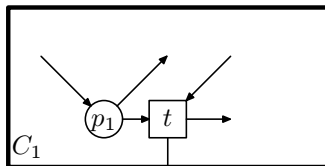
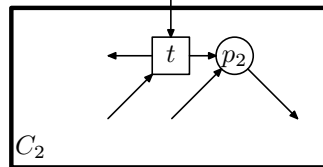
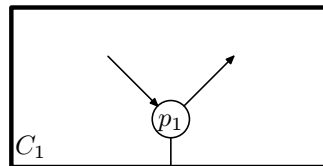
**Věta** (Nutná podmínka živosti a ohraničenosti — silná souvislost)

Nechť je Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  s iniciálním markingem  $M_0$  živá a ohraničená. Pak graf  $\mathcal{N}$  je silně souvislý.

*Důkaz:* Připomeňme, že uvažujeme pouze sítě se slabě souvislým grafem. Jedná se tedy o zesílení charakteristiky. Sporem předpokládejme, že se graf skládá alespoň ze dvou silně souvislých komponent. Kvůli slabé souvislosti tedy existuje alespoň jedna terminální komponenta  $\mathcal{C}_2$  a její předchůdce  $\mathcal{C}_1$ . Konkrétně, existuje přechod  $t$ , který bere z  $p_1 \in \mathcal{C}_1$  a dává do  $p_2 \in \mathcal{C}_2$ . Rozlišíme dvě možnosti podle toho, kde se nachází  $t$ .

Nechť  $t \in \mathcal{C}_1$ . Protože  $\mathcal{N}$  je živá a  $\mathcal{C}_2$  nemůže dávat tokeny do  $\mathcal{C}_1$ , musí být  $\mathcal{C}_1$  schopna libovolněkrát připravit a odpálit přechod  $t$ . Tím dochází ke kumulaci tokenů v  $p_2$  — spor s ohraničeností.

Nechť  $t \in \mathcal{C}_2$ . Protože místo  $p_1$  dává do  $t$ , musí mít libovolněkrát k dispozici token, aby bylo možné libovolněkrát provést přechod  $t$ . Uvážíme-li takovou posloupnost, která opakovaně připravuje přechod  $t$  a vynecháme-li z ní přechod  $t \in \mathcal{C}_2$ , dojde ke kumulaci tokenů v  $p_1$  — spor s ohraničeností.

 $t \in \mathcal{C}_1$  $t \in \mathcal{C}_2$

## S-systémy

### Definice (S-systém)

Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  nazveme *S-systém (S-sít)*, jestliže pro všechny přechody  $t \in T$  platí

$$|\bullet t| = |t\bullet| = 1$$

### Věta (Nutná podmínka dosažitelnosti v S-systému — zachování počtu tokenů)

Nechť je označování  $M'$  dosažitelné z  $M$  v S-systému  $\mathcal{N} = (P, T, F)$ . Potom platí

$$\sum_{p \in P} M(p) = \sum_{p \in P} M'(p)$$

*Důkaz:* Zřejmé — žádný přechod nemění počet tokenů.

### Lemma (Nutná podmínka silné souvislosti grafu S-systému)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je S-systém se silně souvislým grafem. Pro každá dvě místa  $p_1, p_2 \in P$  a označování  $M$ ,  $M(p_1) > 0$ , existují  $\sigma \in T^*$  a označování  $M'$ ,  $M \xrightarrow{\sigma} M'$  takové, že

$$M'(p) = \begin{cases} M(p_1) - 1 & \text{pro } p = p_1 \\ M(p_2) + 1 & \text{pro } p = p_2 \\ M(p) & \text{jinak} \end{cases}$$

*Důkaz:* Ze silné souvislosti grafu  $\mathcal{N}$  plyne existence cesty  $\sigma$  mezi  $p_1$  a  $p_2$ . Označme ji  $\varrho = s_0 t_0 s_1 t_1 \dots t_{n-1} s_n$ ,  $s_i \in P$ ,  $t_i \in T$ ,  $s_0 = p_1$  a  $s_n = p_2$ . Každý přechod  $t_i$ ,  $0 \leq i < n$  odebere token z  $s_i$  a vloží jej do  $s_{i+1}$ . Protože  $s_0 = p_1$  obsahuje při  $M$  alespoň jeden token, je posloupnost přechodů  $\sigma = t_0 \dots t_{n-1}$  proveditelná v  $M$  a označování se změní předepsaným způsobem.

**Věta** (Živost S-systémů)

S-systém  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  s počátečním označováním  $M_0$  je živý právě tehdy, když graf  $\mathcal{N}$  je silně souvislý a existuje  $p \in P : M_0(p) > 0$ .

*Důkaz:* „ $\Rightarrow$ “ Přímým důsledkem nutné podmínky dosažitelnosti je skutečnost, že každý S-systém je ohraničený. Živý S-systém je tedy živá a ohraničená Petriho síť. Graf  $\mathcal{N}$  je proto silně souvislý. Aby byla jakákoliv síť živá, musí jistě obsahovat nenulový počet tokenů. Proto  $\exists p \in P : M_0(p) > 0$ .

„ $\Leftarrow$ “ Nechť  $M$  je libovolné označování dosažitelné z  $M_0$ . Protože v S-systému se zachovává počet tokenů, existuje  $s \in P : M(s) > 0$ . Nechť  $t \in T$  je libovolný. Nechť  $\bullet t = \{s'\}$ . Ze silné souvislosti grafu  $\mathcal{N}$  existuje posloupnost přechodů  $\sigma \in T^*$ , která přesune token z  $s$  do  $s'$  — uschopní přechod  $t$ .

**Lemma** (Postačující podmínka dosažitelnosti v S-systému)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je S-systém se silně souvislým grafem a nechť pro dvě označování  $M, M'$  platí

$$\sum_{p \in P} M(p) = \sum_{p \in P} M'(p)$$

Potom existuje  $\sigma \in T^*$  takové, že  $M \xrightarrow{\sigma} M'$ .

*Důkaz:* Pro každé  $p \in P$ , pro něž  $M(p) > M'(p)$  lze kvůli silné souvislosti grafu  $\mathcal{N}$  přebytečné tokeny přesunout do míst  $s \in P$ , pro něž  $M(s) < M'(s)$ .



**Věta** (Ohraničenost živých S-systémů)

Nechť je S-systém  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  s počátečním označováním  $M_0$  živý. Potom  $(\mathcal{N}, M_0)$  je  $b$ -ohraničený právě tehdy, když platí

$$\sum_{p \in P} M_0(p) \leq b$$

*Důkaz:* „ $\Rightarrow$ “ Živý S-systém má silně souvislý graf. Všechny tokeny v něm lze tedy přemístit do jediného místa  $p_0 \in P$ . Označme tomu odpovídající marking  $M$ . Platí  $M(p_0) \leq b$  z  $b$ -ohraničenosti sítě a  $M(p) = 0$  pro  $p \neq p_0$ . Protože S-systém zachovává počet tokenů v síti, platí

$$\sum_{p \in P} M_0(p) = \sum_{p \in P} M(p) = M(p_0) \leq b$$

„ $\Leftarrow$ “ Protože S-systém zachovává počet tokenů, nemůže žádné místo obsahovat více než  $\sum_{p \in P} M_0(p) \leq b$  tokenů. Tedy síť je  $b$ -ohraničená.

**Věta** (Dosažitelnost v živém S-systému I)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je živý S-systém. Marking  $M$  je dosažitelný z  $M_0$  právě tehdy, když

$$\sum_{p \in P} M_0(p) = \sum_{p \in P} M(p)$$

*Důkaz:* Směr „ $\Rightarrow$ “ vyjadřuje nutnou podmínku dosažitelnosti. Pro opačný směr si uvědomme, že živý S-systém je ohraničený a má tedy silně souvislý graf. Je tedy splněna postačující podmínka pro dosažitelnosti v S-systému.

**Věta** (Charakterizace S-invariantů)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je S-systém. Vektor  $I$  je S-invariant právě tehdy, když  $I = (x)_{i=1}^{|P|}$  pro nějaké  $x \in \mathbb{Q}$ .

*Důkaz:* „ $\Leftarrow$ “ Pro každé  $t \in T$  platí

$$\sum_{p \in \bullet t} I(p) = x = \sum_{p \in t^\bullet} I(p)$$

což je alternativní definice S-invariantů.

„ $\Rightarrow$ “ Nechť  $|P| = n$  a  $p \in P$  je libovolné místo. Definujme induktivně množiny  $P_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , takto

$$\begin{aligned} P_0 &= \{p\} \\ P_{i+1} &= \{p \in t^\bullet \mid (\exists s \in P_i)(\exists t \in T) : s \in \bullet t\} \cup \\ &\quad \cup \{p \in \bullet t \mid (\exists s \in P_i)(\exists t \in T) : s \in t^\bullet\} \end{aligned}$$

Jistě pro všechna  $i$  platí  $P_i \subseteq P_{i+1}$  a kvůli slabé souvislosti grafu  $\mathcal{N}$  platí  $P_n = P$ . Nechť  $I$  je libovolný S-invariant. Indukcí vzhledem k  $i$  ukážeme, že  $(\forall i)(\forall s \in P_i) : I(s) = I(p)$ . Pro  $i = 0$  tvrzení platí. Nechť  $s \in P_{i+1}$  je libovolné. Pak existuje  $s' \in P_i$  a přechod  $t \in T$  tak, že  $\{s'\} = \bullet t$  a  $\{s\} = t^\bullet$ , nebo  $\{s'\} = t^\bullet$  a  $\{s\} = \bullet t$ . Protože  $I(s') = I(p)$  z indukčního předpokladu, v obou případech dostáváme z alternativní definice S-invariantu

$$I(p) = I(s') = I(s)$$

**Věta** (Dosažitelnost v živém S-systému II)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je živý S-systém při označování  $M_0$ . Označování  $M$  je dosažitelné z  $M_0$  právě tehdy, když pro každý S-invariant  $I$  platí

$$I^T M_0 = I^T M$$

*Důkaz:* Implikace „ $\Rightarrow$ “ platí obecně — alternativní nutná podmínka dosažitelnosti. Zbývá tedy ukázat „ $\Leftarrow$ “. Podle charakterizace S-invariantů S-systémů je  $I = (1)_{i=1}^{|P|}$  S-invariant, tedy platí

$$\sum_{p \in P} M_0(p) = \sum_{p \in P} M(p)$$

Podle přechodí věty o dosažitelnosti je  $M$  dosažitelné z  $M_0$ .

**Obsah**

**Obrázky**

**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**

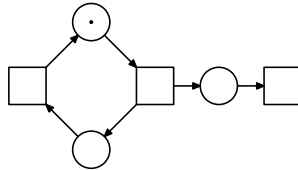
## T-systémy

**Definice** (T-systém)

Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  nazveme *T-systémem*, jestliže pro všechna místa  $p \in P$  platí

$$|p^\bullet| = |\bullet p| = 1$$

**Příklad** (Neohraničený T-systém)



**Definice** (Cyklus)

*Cyklem* v síti  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  rozumíme cestu z uzlu  $x$  grafu  $\mathcal{N}$  do uzlu  $y$  takovou, že  $F(y, x) = 1$  a žádný uzel se na této cestě nevyskytuje více než jednou.

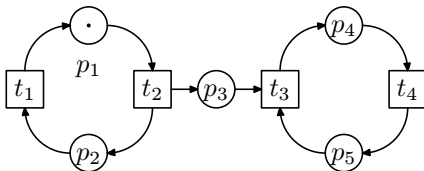
Nechť  $M$  je marking  $\mathcal{N}$ ,  $\gamma$  je cyklus v  $M$  a  $R$  je množina míst v  $\gamma$ . Definujeme

$$M(\gamma) = \sum_{p \in R} M(p)$$

Řekneme, že cyklus  $\gamma$  je *označován* v markingu  $M$ , jestliže  $M(\gamma) \geq 1$ .

### Příklad (T-systém s cykly)

Síť s markingem na následujícím obrázku obsahuje dva cykly,  $\gamma_1 = p_1t_2p_2t_1$  a  $\gamma_2 = p_4t_4p_5t_3$ , z nichž první je označovaný a druhý není.



### Věta (Nutná podmínka dosažitelnosti v T-systému)

Nechť  $\gamma$  je cyklus T-systému  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  a  $M_0$  jeho iniciální marking. Pak pro každé označování  $M$  dosažitelné z  $M_0$  platí

$$M_0(\gamma) = M(\gamma)$$

*Důkaz:* Protože  $M$  je dosažitelné z  $M_0$ , existuje posloupnost přechodů  $\sigma \in T^*$ ,  $M_0 \xrightarrow{\sigma} M$ . Indukcí k délce  $\sigma$ . Základní krok je zřejmý. Uvažme tedy  $M'$  dosažitelné z  $M_0$ ,  $M' \xrightarrow{t} M''$ ,  $M_0(\gamma) = M'(\gamma)$  pro libovolné pevné  $t \in T$ . Rozlišíme dvě možnosti.

Nechť  $\gamma$  obsahuje  $t$ . Potom  $t$  bere z jednoho místa cyklu — z každého místa vede právě jedna hrana, hrany z ostatních míst cyklu musí tvořit tento cyklus, vedou tedy do jiných přechodů. Ze stejného důvodu  $t$  dává do právě jednoho místa cyklu. Počet tokenů v cyklu se tedy odpálením přechodu  $t$  nezmění.

Nechť  $\gamma$  neobsahuje  $t$ . Všechny hrany, které vedou z míst cyklu a do míst cyklu, tvoří tento cyklus. Proto  $t$  nebere z žádného místa cyklu ani do žádného nedává. Odpálením takového přechodu se distribuce tokenů v cyklu nezmění.

Obsah

Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět

**Důsledek** (Nutná podmínka neohraničenosti místa v T-systému)

Neohraničená místa v T-systémech neleží na žádném cyklu.

**Věta** (Živost T-systémů)

T-systém  $(\mathcal{N}, M_0)$ ,  $\mathcal{N} = (P, T, F)$ , je živý právě tehdy, když každý cyklus  $\gamma$  splňuje  $M_0(\gamma) \geq 1$ .

*Důkaz:* Implikace „ $\Rightarrow$ “ se snadno dokáže ze své obměny.

Pro důkaz „ $\Leftarrow$ “ uvažme libovolný marking  $M$  dosažitelný z  $M_0$  a libovolný přechod  $t \in T$ . Ukážeme, že existuje označování  $M'$ ,  $M \rightarrow^* M'$  a  $t$  je uschopněn v  $M'$ . Pro každé označování  $M$  definujme množinu  $S_M$  předpisem

$$S_M = \{s \in P \mid \text{existuje cesta z } s \text{ do } t, \text{ na níž jsou všechna místa prázdná v } M\}$$

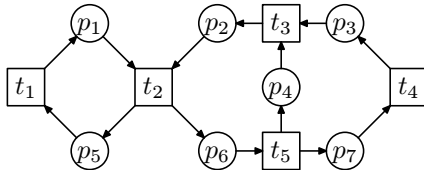
Indukcí k  $|S_M|$  dokážeme, že pro libovolnou  $S_M$  lze připravit přechod  $t$ . Je-li  $|S_M| = 0$ , pak  $t$  je připraven v  $M$ . Nechť tedy  $|S_M| = n + 1$ . Označme  $\pi$  cestu v  $(\mathcal{N}, M)$  maximální délky, na níž jsou všechna místa prázdná, a která končí v  $t$ . Cesta  $\pi$  je nutně konečná, jinak by obsahovala neoznačovaný cyklus, což z předpokladů není možné. Z maximality  $\pi$  potom plyne, že první uzel je přechod, označme jej  $u$ , a tento je připraven v  $M$ . Uvažme marking  $M'$ ,  $M \xrightarrow{u} M'$ . Ukážeme, že  $S_{M'} \subset S_M$ , z indukčního předpokladu bude tedy možné uzavřít, že z  $M$  lze připravit  $t$ .

Nechť je tedy  $s \in S_{M'}$ . Pak existuje cesta z  $s$  do  $t$ , na níž jsou všechna místa při označování  $M'$  prázdná. Uvědomme si, že  $M'$  vzniklo z  $M$  provedením přechodu  $u$ . Označování se tedy liší pouze v místech z  $\bullet u$  a  $u \bullet$  a uvažovaná cesta z  $s$  do  $t$  neobsahuje přechod  $u$ , protože pak by obsahovala neprázdné místo z  $u \bullet$  — všechna místa z  $u \bullet$  jsou bezprostředně po provedení přechodu  $u$  neprázdná. Tato cesta neobsahuje ani místa

z  $u^\bullet$ , protože  $\mathcal{N}$  je T-systém, takže z každého takového místa vede jediná hrana — do přechodu  $u$ . Na všech místech uvažované cesty z  $s$  do  $t$  jsou  $M$  a  $M'$  totožné, tedy  $s \in S_M$ .

Zbývá ukázat, že existuje  $s \in S_M$  takové, že  $s \notin S_{M'}$ . Při označování  $M$  existuje prázdné místo  $s \in u^\bullet$ ,  $s \in S_M$ , druhý uzel maximální cesty uvažované na začátku důkazu. V označování  $M'$  — po provedení přechodu  $u$  — je toto místo neprázdné, tedy  $s \notin S_{M'}$ .

**Příklad** (Ilustrace k důkazu charakteristické podmínky živosti T-systémů)



**Důsledek** (Složitost problému živosti T-systémů)

Problém živosti sítě je pro T-systémy rozhodnutelný v polynomiálním čase. Na základě předchozí věty lze totiž problém živosti T-systémů rozhodovat následujícím algoritmem.

```

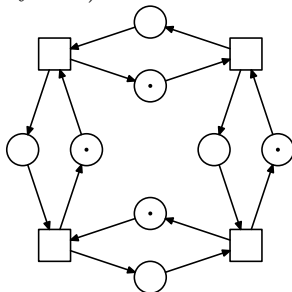
while existuje prázdné nenavštívené místo do
    prohledáváním do šířky hledej cyklus složený ...
    ... pouze z přechodů a prázdných nenavštívených míst
    místa, kterými prohledávání prošlo, se stávají navštívená
    if nalezen cyklus then
        return síť není živá
    fi
done
return síť je živá

```

**Věta** (Charakterizace T-invariantů)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je T-systém. Vektor  $I$  je T-invariant  $\mathcal{N}$  právě tehdy, když  $I = (x)_{i=1}^{|T|}$  pro nějaké  $x \in \mathbb{Q}$ .

*Důkaz:* Důkaz je duální důkazu charakterizace S-invariantů pro S-systémy.

**Příklad** (Živý 1-ohraničený T-systém)**Věta** (Ohraničenost živých T-systémů)

Živý T-systém  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  s iniciálním markingem  $M_0$  je  $b$ -ohraničený právě tehdy, když každé místo  $s \in P$  leží na nějakém cyklu  $\gamma$  takovém, že  $M_0(\gamma) \leq b$ .

*Důkaz:* „ $\Leftarrow$ “ Tento směr plyne přímo z nutné podmínky dosažitelnosti v T-systému — počet tokenů v cyklech se zachovává. V každém místě tedy může být nejvýše tolik tokenů, kolik tokenů je v cyklu s nejméně tokeny, na němž místo leží. Dle předpokladů implikace je to pro každé místo nejvýše  $b$ .

„ $\Rightarrow$ “ Nechť  $s \in P$  je libovolné pevné místo. Musíme ukázat, že existuje cyklus  $\gamma$  obsahující  $s$ , pro nějž  $M(\gamma) \leq b$ . Uvažme dosažitelné označkování  $M$ , kde  $M(s)$  je max-



imální možné. Z  $b$ -ohraničenosti sítě v předpokladech je jisté, že  $M(s) \leq b$ . Definujme označkování  $L$  předpisem

$$L(r) = \begin{cases} 0 & \text{pro } r = s \\ M(r) & \text{jinak} \end{cases}$$

Potom systém  $(\mathcal{N}, L)$  není živý. Kdyby byl, potom by z  $L$  existovala proveditelná posloupnost přechodů  $\sigma$ , která by připravila a provedla přechod  $t \in \bullet s$ . Tím by se síť dostala do označkování  $L'$ ,  $L'(s) = 1$ . Poslopnost přechodů  $\sigma$  by však jistě bylo možné provést i z označkování  $M$ , čímž by se síť dostala do označkování  $M'$ ,  $M'(s) = M(s) + 1$ , což je spor s předpokladem maximality.

Protože systém  $(\mathcal{N}, L)$  není živý, z obměny charakteristiky živých T-systémů plyne, že existuje cyklus  $\gamma$ ,  $L(\gamma) = 0$ . Ovšem systém  $(\mathcal{N}, M)$  živý je, tedy  $M(\gamma) > 0$ . Protože označkování  $M$  a  $L$  se liší pouze hodnotou pro místo  $s$ , musí  $s$  ležet na  $\gamma$ . V označkování  $M$  je to navíc jediné neprázdné místo tohoto cyklu. Pro cyklus  $\gamma$  proto platí

$$M(\gamma) = M(s) \leq b$$

Protože  $M$  je dosažitelné z  $M_0$ , z nutné podmínky dosažitelnosti plyne  $M_0(\gamma) = M(\gamma)$ . Tedy  $\gamma$  je cyklus požadované vlastnosti.

**Lemma** (Vlastnosti řešení nutné podmínky dosažitelnosti pro T-systémy)

Nechť  $N$  je incidenční matice T-systému  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  a nechť je označkování  $M$  dosažitelné z  $M_0$ . Potom existuje takové řešení rovnice

$$M_0 + NX = M \tag{*}$$

kteřé má všechny složky kladné.

*Důkaz:* Z nutné podmínky dosažitelnosti pro obecné Petriho sítě je zaručena existence nějakého řešení  $X_0$ . Nechť  $I = \lambda(1)_{i=1}^{|T|}$  je T-invariant T-systému. Potom i  $X + I$  je řešení rovnice (\*). Protože  $I$  je T-invariant, platí  $NI = 0$ , takže

$$N(X + I) = NX + NI = NX$$

Protože složky  $X_0$  jsou konečné a složky  $I$  lze zvolit libovolně velké, existuje řešení  $X_1 = X_0 + I$ , jehož všechny složky jsou kladné.

**Lemma** (Celočíselná řešení nutné podmínky dosažitelnosti pro T-systémy)

Jestliže pro označkování  $M$  dosažitelné z  $M_0$  v T-systému  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  s incidenční maticí  $N$  existuje řešení rovnice

$$M_0 + NX = M \quad (*)$$

potom má tato rovnice i celočíselné řešení, jehož všechny složky jsou kladné.

*Důkaz:* Na základě předchozího lemmatu existuje řešení  $X \in \mathbb{Q}^{|T|}$ , jehož všechny složky jsou kladné. Definujme  $Y : T \rightarrow \mathbb{N}$  předpisem

$$Y(t) = \lceil X(t) \rceil$$

Ukážeme, že  $Y$  je také řešením rovnice (\*). Nechť  $s \in P$  je libovolné. Protože  $\mathcal{N}$  je T-systém, platí  $|\bullet s| = |s \bullet| = 1$ . Označme  $t_1 \in s \bullet$  a  $t_2 \in \bullet s$  jediné přechody vedoucí z  $s$  a do  $s$ . Protože  $X$  je řešením rovnice (\*), platí

$$M(s) = M_0(s) + X(t_2) - X(t_1)$$

Přitom jistě  $M_0(s) \in \mathbb{Z}$  a  $M(s) \in \mathbb{Z}$ , tedy  $X(t_2) - X(t_1) \in \mathbb{Z}$  a existují  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $r \in \langle 0, 1 \rangle$  takové, že

$$X(t_1) = x_1 + r$$

$$X(t_2) = x_2 + r$$

Proto platí

$$X(t_2) - X(t_1) = x_2 - x_1 = (x_2 + 1) - (x_1 + 1) = Y(t_2) - Y(t_1)$$

$$M(s) = M_0(s) + Y(t_2) - Y(t_1) \text{ pro všechna } s \in P, t_1 \in s^\bullet \text{ a } t_2 \in \bullet s$$

$$M = M_0 + NY$$

**Věta** (Dosažitelnost v živém T-systému)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je živý T-systém s iniciálním markingem  $M_0$  a incidenční maticí  $N$ . Marking  $M$  je dosažitelný z  $M_0$  právě tehdy, když pro každý S-invariant  $I$  platí  $I^T M_0 = I^T M$ .

*Důkaz:* „ $\Rightarrow$ “ Platí obecně — alternativní nutná podmínka dosažitelnosti.

„ $\Leftarrow$ “ Protože  $I^T M_0 = I^T M$  pro každý S-invariant  $I$ , má podle alternativní nutné podmínky dosažitelnosti soustava

$$M_0 + NX = M$$

řešení v  $\mathbb{Q}$ . Podle předchozího lemmatu navíc existuje řešení  $Y$ , jehož všechny složky jsou přirozená čísla. Ukážeme, že existuje posloupnost  $\sigma \in T^*$  proveditelná z  $M_0$ ,  $\vec{\sigma} = Y$  jejímž výsledkem je marking  $M$ . Indukcí k  $n = \sum_{t \in T} Y(t)$ . Je-li  $n = 0$ , potom  $M = M_0$  z (\*).

Uvažme případ pro  $n + 1$ . Ukážeme, že existuje  $t \in T$  proveditelný v  $M_0$ ,  $Y(t) > 0$ . Položme

$$\langle Y \rangle = \{t \in T \mid Y(t) > 0\}$$

$$S_Y = \{s \in P \mid s \in \bullet \langle Y \rangle \wedge M_0(s) = 0\}$$

Nechť  $s \in S_Y$ , tedy  $M_0(s) = 0$ . Pak existuje takový přechod  $t \in \langle Y \rangle$ , že  $s \in t^\bullet$ . Uvědomme si totiž, že pro  $Y$  platí  $M = M_0 + NY$ . Kdyby zmíněný přechod neexistoval, bylo by

$M(s) < 0$ , což pro označování není možné. Protože  $\mathcal{N}$  je T-systém, je tento přechod jediný, pro nějž platí  $s \in t^\bullet$ .

Uvažme nyní cestu přes místa z  $S_Y$ . Taková cesta je nutně konečná, jinak by T-systém obsahoval cyklus prázdných míst — spor s živostí. Podle předchozího odstavce musí tato cesta začínat přechodem  $t \in \langle Y \rangle$ . Pokud by nezačínala přechodem, bylo by možné ji prodloužit. Pokud začíná přechodem, musí to být přechod z  $\langle Y \rangle$ .

Přechod  $t$  je v  $M_0$  připraven. V opačném případě by existovalo místo  $s \in \bullet t$ ,  $t \in \langle Y \rangle$ ,  $M_0(s) = 0$ , tedy  $s \in S_Y$ , a cestu by bylo možné prodloužit.

Označme  $M'$  označování, pro nějž  $M_0 \xrightarrow{t} M'$ . Pro označování  $M'$  a řešení  $Y'$  rovnice (\*) definované pro každé  $u \in T$  předpisem

$$Y'(u) = \begin{cases} Y(u) - 1 & \text{pro } u = t \\ Y(u) & \text{jinak} \end{cases}$$

podle indukčního předpokladu existuje taková posloupnost přechodů  $\sigma' \in T^*$  proveditelná z  $M'$ , že  $\bar{\sigma}' = Y'$ . Potom  $\sigma = t\sigma'$  je hledaná posloupnost.

**Obsah**

**Obrázky**

**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**

## Free-choice systémy

**Definice** (Free-choice systém)

Petriho síť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  nazveme *free-choice systémem*, jestliže platí

$$F(s, t) = 1 \Rightarrow (\forall s' \in \bullet t)(\forall t' \in s \bullet) : F(s', t') = 1$$

**Věta** (Alternativní definice free-choice systémů)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť. Následující podmínky jsou ekvivalentní

$\mathcal{N}$  je free-choice systém (a)

$$\forall s, r \in P : s \bullet \cap r \bullet = \emptyset \vee s \bullet = r \bullet \quad (b)$$

$$\forall t, u \in T : \bullet t \cap \bullet u = \emptyset \vee \bullet t = \bullet u \quad (c)$$

*Důkaz:* Zřejmé.

**Definice** (Cluster uzlu)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť a  $x$  uzel jejího grafu. *Cluster* uzlu  $x$  je nejmenší množina  $[x]$  uzlů grafu  $\mathcal{N}$ , která splňuje

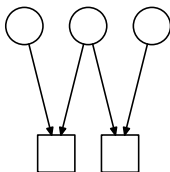
$$x \in [x]$$

$$s \in P, s \in [x] \Rightarrow s \bullet \subseteq [x]$$

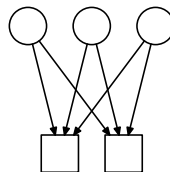
$$t \in T, t \in [x] \Rightarrow \bullet t \subseteq [x]$$

### Poznámka (Clustery v obecné Petriho síti a ve free-choice systému)

U free-choice systémů je kladeno omezení na hrany mezi místy a přechody, které z těchto míst berou — na hrany v clusterech. Rozdíl je znázorněn na následujícím obrázku.



cluster v obecné Petriho síti může vypadat například takto



ve free-choice systému musí cluster se stejnými místy a přechody vypadat vždy takto

### Věta (Rozklad na clustery)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť. Množina všech clusterů tvoří rozklad na množině uzlů grafu  $\mathcal{N}$ .

*Důkaz:* Zřejmé.

### Příklad (Rozklad na clustery)

Na následujícím obrázku je znázorněn free-choice systém a rozklad jeho grafu na clustery. Rozklad grafu na clustery lze ovšem provést i pro obecnou Petriho síť, i když tam není tento pojem tak důležitý.

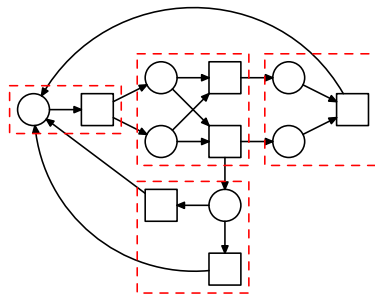
Obsah

Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět



**Definice** (Stabilní predikáty — sifony a pasti)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je Petriho síť,  $R \subseteq P$  množina míst. Množinu  $R$  nazveme *sifon*, jestliže  $\bullet R \subseteq R^\bullet$ . Množinu  $R$  nazveme *past*, jestliže  $R^\bullet \subseteq \bullet R$ .

**Poznámka** (Význam pojmů sifon a past vzhledem k označování)

Z definic pojmů lze snadno dokázat následující tvrzení. Je-li sifon prázdný, prázdný již zůstane. Obsahuje-li past alespoň jeden token, již nikdy nebude prázdná.

**Věta** (Sifon v uváznuté síti)

Nechť  $(\mathcal{N}, M_0)$  je uváznutá Petriho síť, tj. žádný přechod není připraven. Potom množina prázdných míst sítě  $\mathcal{N}$  při označování  $M_0$  tvoří množinově neprázdný sifon.

*Důkaz:* Množinu prázdných míst v uváznuté síti  $(\mathcal{N}, M_0)$  označme  $R$ . Protože je síť uváznutá a existuje  $t \in T \neq \emptyset$ , musí existovat prázdné místo  $p \in P$ ,  $t \in p^\bullet$ . Tedy  $R \neq \emptyset$ . Ukážeme, že  $R$  je sifon. Nechť  $t \in \bullet R$ . Protože síť je uváznutá, existuje místo  $p \in P$ ,  $t \in p^\bullet$ , které je prázdné, tedy  $p \in R$ . Proto také  $t \in R^\bullet$ .

**Věta** (Postačující podmínka neuváznutí)

Jestliže každý neprázdný sifon sítě  $(\mathcal{N}, M_0)$  obsahuje past, která je při  $M_0$  označovaná, pak v systému nemůže dojít k uváznutí.

*Důkaz:* Sporem předpokládejme, že  $M_0 \xrightarrow{\sigma} M$ , kde  $\sigma \in T^*$  je proveditelná posloupnost přechodů z  $M_0$ , a síť  $(\mathcal{N}, M)$  je uváznutá. Dle předchozí věty existuje množinově neprázdný sifon  $R \subseteq P$ , který není označovaný. Pak  $R$  obsahuje past, která byla při  $M_0$  označovaná, ale při  $M$  již označovaná není — spor.

**Lemma** (Nutná podmínka pro existenci mrtvého přechodu free-choice systému)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je free-choice systém. Je-li  $t \in T$  mrtvý v markingu  $M$ , pak existuje místo  $s \in \bullet t$  a označování  $M'$  dosažitelné z  $M$  tak, že  $s$  je mrtvý v  $M'$ .

*Důkaz:* Mějme mrtvý přechod  $t \in T$ . Protože  $\mathcal{N}$  je free-choice systém, jsou mrtvé i všechny přechody z množiny  $(\bullet t)^\bullet$ , protože berou tokeny ze stejné množiny míst. Sporem předpokládejme, že žádné místo z  $\bullet t$  není mrtvé. Protože všechny přechody, které berou tokeny z těchto míst jsou mrtvé, tokeny v těchto místech se mohou pouze kumulovat. Postupně lze tedy dosáhnout označování, v němž jsou všechna tato místa neprázdná, což je spor — potom by byly mrtvé přechody připraveny.

**Lemma** (Nutná podmínka neživých free-choice systémů)

Každý neživý free-choice systém  $(\mathcal{N}, M_0)$ ,  $\mathcal{N} = (P, T, F)$ , má takový neprázdný sifon  $R \subseteq P$  a dosažitelný marking  $M$ , že  $R$  není označovaný v  $M$ .

*Důkaz:* Protože  $(\mathcal{N}, M_0)$  není živý, existuje  $t \in T$  a dosažitelný marking  $M'$  tak, že  $t$  je mrtvý v  $M'$ . Podle předchozího lemmatu existuje marking  $M''$  dosažitelný z  $M'$  a místo  $p \in \bullet t$ , které je mrtvé v  $M''$ . Označme  $M$  marking dosažitelný z  $M''$ , který maximalizuje množinu mrtvých míst a tuto množinu označme  $R \subseteq P$ .



Množina  $R$  je neprázdná, protože  $p \in R$ . Nechť  $t \in \bullet R$ . Potom  $t$  je mrtvý v  $M$ , jinak by množina  $R$  obsahovala i místa, která v  $M$  nejsou mrtvá. Podle předchozího lemmatu tedy  $t \in p^\bullet$  pro nějaké místo  $p \in P$  mrtvé v  $M$ . Protože  $p$  je mrtvé v  $M$ , platí  $p \in R$  a tedy  $t \in R^\bullet$  — množina  $R$  je sifon. Protože sifon  $R$  obsahuje pouze místa mrtvá v  $M$ , není  $R$  označován v  $M$ . Je to tedy sifon požadovaných vlastností.

**Věta** (Postačující podmínka živosti free-choice systému)

Nechť  $(\mathcal{N}, M_0)$  je free-choice systém. Jestliže každý neprázdný sifon  $R$  obsahuje past označovanou v  $M_0$ , pak  $(\mathcal{N}, M_0)$  je živá síť.

*Důkaz:* Obměna předchozího lemmatu.

**Poznámka** (Existence největšího sifonu a největší pasti)

Protože sjednocením sifonů je sifon a sjednocením pastí je past, je korektní hovořit o největším sifonu a největší pasti, protože oba existují.

**Definice** (Alokace, doména)

Nechť  $C$  je nějaká množina clusterů Petriho sítě  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  taková, že každý cluster z  $C$  obsahuje alespoň jeden přechod. *Alokací* rozumíme funkci  $\alpha : C \rightarrow T$  takovou, že

$$\forall c \in C : \alpha(c) \in C$$

Potom  $C$  nazýváme *doménou*  $\alpha$ .

Řekneme, že posloupnost přechodů  $\sigma$  *souhlasí s alokací*  $\alpha : C \rightarrow T$ , pokud pro všechny přechody  $t \in T$  vyskytující se v  $\sigma$  platí  $[t] \in C \Leftrightarrow \alpha([t]) = t$ .

**Lemma** (Nekonečná posloupnost přechodů k alokaci)

Nechť  $\alpha$  je alokace živého free-choice systému  $\mathcal{N}$  s neprázdnou doménou  $C$  a počátečním označováním  $M_0$ . Potom existuje nekonečná posloupnost přechodů proveditelná z  $M_0$  taková, že  $\sigma$  souhlasí s  $\alpha$  a alespoň jeden prvek z  $\alpha(C)$  se v  $\sigma$  vyskytuje nekonečněkrát.

*Důkaz:* Nechť  $t$  je přechod připravený v nějakém označování  $M$  free-choice systému. Potom jsou připraveny i všechny přechody  $u \in [t]$ , protože berou ze stejné množiny míst jako přechod  $t$ . Proto lze hovořit o připravenosti clusteru — je-li cluster připraven, lze provést libovolný jeho přechod.

Definujme posloupnost přechodů proveditelnou z  $M_0$  v  $\mathcal{N}$  induktivně takto:

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \varepsilon \\ \sigma_{i+1} &= \sigma_i \pi_i \alpha([t_i]) \\ \sigma &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i\end{aligned}$$

kde  $\pi_i$  je nejkratší posloupnost přechodů, která připraví nějaký cluster  $[t_i] \in C$ . Posloupnost  $\sigma$  souhlasí s alokací  $\alpha$ , protože přechody z žádného  $\pi_i$  nenáleží kvůli minimalitě do žádného clusteru z  $C$ . Z každého připraveného clusteru  $[t_i] \in C$  je proveden právě přechod  $\alpha([t_i])$ . Množina  $\alpha(C)$  je konečná, ale posloupnost  $\sigma$  obsahuje nekonečně mnoho výskytů jejích prvků, nutně se tedy alespoň jeden z nich musí v  $\sigma$  vyskytovat nekonečněkrát.

**Definice** (Alokace bez cyklů vzhledem k množině míst)

Nechť  $R$  je nějaká množina míst Petriho sítě  $\mathcal{N}$ . Označme

$$C = \{[t] \mid t \in R^\bullet\}$$

Množina  $C$  je množina clusterů generovaná množinou míst  $R$ , z nichž každý obsahuje alespoň jeden přechod. Řekneme, že alokace  $\alpha$  s doménou  $C$  je bez cyklů pro  $R$ , jestliže síť  $\mathcal{N}$  neobsahuje cyklus tvořený pouze místy z  $R$  a přechody z  $\alpha(C)$ .

**Lemma** (Existence alokace bez cyklů v Petriho síti pro danou množinu míst)

Nechť  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  je free-choice systém,  $R \subseteq P$  nějaká množina míst a nechť  $Q \subseteq P$  je maximální past obsažená v  $R$ . Není vyloučeno, že  $Q = \emptyset$ . Označme

$$D = R \setminus Q$$

$$C = \{[t] \mid t \in D^\bullet\}$$

Pak existuje alokace s doménou  $C$ , která je bez cyklů pro  $D$  taková, že alokované přechody nedávají do pasti  $Q$ , tj.

$$\alpha(C) \cap \bullet Q = \emptyset$$

*Důkaz:* Indukcí k  $|R|$ . Je-li  $R = \emptyset$ , potom i  $D = Q = C = \emptyset$ . Jediná alokace s doménou  $C = \emptyset$  je prázdná alokace, která je jistě bez cyklů pro  $D$  a jistě platí  $\alpha(C) \cap \bullet Q = \emptyset$ .

Nechť  $|R| > 0$ . Je-li  $R$  past, potom  $Q = R$  a  $D = C = \emptyset$ . Zbytek je totožný se základním krokem indukce.

Nechť tedy  $R$  není past. Potom existuje přechod  $t \in T$  takový, že  $t \in R^\bullet$  a  $t \notin \bullet R$ . Označme  $R' = R \setminus \bullet t$ . Jistě platí  $R' \subset R$ ,  $|R'| < |R|$ . Nechť  $Q'$  je maximální past v  $R'$  a označme

$$D' = R' \setminus Q'$$

$$C' = \{[u] \mid u \in D'^\bullet\}$$

Podle indukčního předpokladu existuje alokace  $\alpha' : C' \rightarrow T$ , která je bez cyklů pro  $D'$  taková, že  $\alpha'(C') \cap Q' = \emptyset$ .

Protože přechod  $t$  porušuje vlastnost pasti pro množinu  $R$ , nemůže žádné místo z  $\bullet t$  patřit do pasti  $Q$  a tedy  $Q = Q'$ . Potom  $D = D' \cup \bullet t$  a  $C = \cup\{[t]\}$ . Definujme  $\alpha : C \rightarrow T$

předpisem

$$\alpha(c) = \begin{cases} \alpha'(c) & \text{pro } c \in C' \\ t & \text{pro } c = [t] \end{cases}$$

Pokud by v  $D$  existoval přechod přes alokované přechody, musel by obsahovat přechod  $t$ . V  $D'$  totiž takový cyklus nebyl a  $D$  obsahuje navíc pouze místa z  $\bullet t$  a  $t$  je jediný alokovaný přechod, který vede z míst z  $\bullet t$ . Jenže  $t$  nevede ani do  $R$ , jistě tedy nevede ani do  $D$ . Uvažovaný cyklus tedy neexistuje. Přechod  $t$  navíc jistě nevede ani do  $Q$ , tj.  $t \notin \bullet Q = \bullet Q'$ , přitom je to jediný přechod, který je v  $\alpha(C)$  navíc oproti  $\alpha'(C')$ . Proto  $\alpha(C) \cap \bullet Q = \emptyset$ .

**Věta** (Nutná podmínka živosti free-choice systému)

Každý neprázdný sifon živého free-choice systému obsahuje iniciálně označovanou past.

*Důkaz:* Nechť  $(\mathcal{N}, M_0)$  je živý free-choice systém. Nechť  $R \neq \emptyset$  je sifon a nechť  $Q$  je maximální past obsažená v  $R$ . Musíme ukázat, že  $M_0(Q) > 0$ . Předně si uvědomme, že z obměny nutné podmínky neživosti free-choice systémů plyne, že  $M_0(R) > 0$ . Označme  $D = R \setminus Q$ .

Pokud  $D^\bullet = \emptyset$ , potom je  $D$  past obsažená v  $R$ . Protože  $R = D \cup Q$  a  $D$  i  $Q$  jsou pasti, je i  $R$  past. Z maximality  $Q$  potom plyne, že  $Q = R$  a  $D = \emptyset$ . Potom z výše uvedeného  $M_0(Q) = M_0(R) > 0$ .

Nechť tedy  $D^\bullet \neq \emptyset$ . Položme  $C = \{[t] \mid t \in D^\bullet\}$ . Podle předchozího lemmatu existuje alokace  $\alpha : C \rightarrow T$ , která je bez cyklů pro  $D$  a splňuje  $\alpha(C) \cap \bullet Q = \emptyset$ . Podle lemmatu o nekonečné posloupnosti přechodů k alokaci existuje k alokaci  $\alpha$  nekonečná posloupnost přechodů  $\sigma \in T^*$ , která souhlasí s  $\alpha$  a alespoň jeden přechod z  $\alpha(C)$  je v ní vyskytuje nekonečněkrát. Dokážeme, že platí

$$A(\sigma) \cap \bullet Q \subseteq Q^\bullet \tag{i}$$

$$Q^\bullet \cap \mathcal{A}(\sigma) \neq \emptyset \quad (ii)$$

Z podmínky (i) plyne, že se  $Q$  nemůže označkovat během posloupnosti přechodů  $\sigma$ . Z podmínky (ii) plyne, že nějaký přechod z posloupnosti  $\sigma$  bere z  $Q$ . Aby to bylo možné, musí být  $M_0(Q) > 0$ .

Důkaz (i) sporem. Nechť existuje  $t \in \mathcal{A}(\sigma)$  takový, že  $t \in \bullet Q$ , ale  $t \notin Q^\bullet$ . Protože  $R$  je sifon a  $Q \subseteq R$ , přechod  $t$  bere z nějakého místa  $s \in R$ . Protože  $t \notin Q^\bullet$ , musí být  $s \in D$ , tedy  $[t] \in C$ . Přechod  $t$  se navíc vyskytuje v  $\sigma$ , takže to musí být alokovaný přechod. Alokační byla ovšem zvolena tak, že  $\alpha(C) \cap \bullet Q = \emptyset$ , takže musí platit  $t \notin \bullet Q$  — spor.

Důkaz (ii). Definujme relaci  $\prec$  na  $\alpha(C)$  takto:  $t \prec t'$ , jestliže existuje cesta z  $t$  do  $t'$  přes uzly z  $D \cup \alpha(C)$ . Cesta může být tvořena pouze jediným uzlem  $t = t'$ , relace je tedy reflexivní. Protože graf  $D \cup \alpha(C)$  neobsahuje cykly, je relace  $\prec$  uspořádání. Nechť  $u$  je některý minimální prvek v tomto uspořádání takový, že  $u$  se vyskytuje v  $\sigma$  nekonečněkrát.

Přechod  $u$  bere z nějakého místa  $s \in D$ , protože podle definice  $C$  je  $u = \alpha([t])$  pro nějaké  $t \in D^\bullet$ . Proto se v  $\sigma$  musí nekonečněkrát vyskytovat přechod  $v$ , který dává do  $s$ , aby byl uschopněn přechod  $u$  (přechodů je konečně mnoho). Protože  $v$  dává do sifonu  $R$ , musí z něj také brát.

Tedy  $v$  bere z  $Q \cup D = R$ . Kdyby  $v$  bral z  $D$ , dostaneme spor s minimalitou  $u$  v uspořádání  $\prec$ . Proto  $v$  bere z  $Q$ . Máme tedy přechod vyskytující se v  $\sigma$ ,  $v \in \mathcal{A}(\sigma)$ , který bere z  $Q$ ,  $v \in Q^\bullet$ . To je hledaný přechod pro důkaz (ii).

**Věta** (Commonerova věta)

Free-choice systém je živý právě tehdy, když každý jeho neprázdný sifon obsahuje iniciálně označkovanou past.

Obsah

Obrázky

Rejstřík

Dopředu

Zpět

*Důkaz:* Viz nutná a postačující podmínka živosti free-choice systému.

**Důsledek** (Složitost problému živosti a neživosti)

Problém neživosti free-choice systémů je NP-úplný. Z toho plyne, že problém živosti je co-NP-úplný.

*Důkaz:* Redukcí ze SAT. Pro danou formuli  $\varphi$  sestrojíme free-choice systém tak, aby  $\varphi$  měla splňující valuaci právě tehdy, když free-choice systém bude neživý.

**Obsah**

**Obrázky**

**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**

# Rejstřík

alokace  
alokace, bez cyklů  
bisimulace  
cluster  
Commonerova věta  
coverability tree  
cyklus  
cyklus, označovaný  
Dicksonovo lemma  
doména  
ekvivalence, bisimulační  
ekvivalence, stopová  
free-choice systém  
funkce, Hilbert-Ackermannova  
funkce, Ramseyova  
Karp-Miller tree  
Kroneckerovo delta  
marking  
matice, incidenční  
Miského stroj  
místo  
místo,  $k$ -ohraničené  
místo, mrtvé  
místo, ohraničené  
model-checking

**Obsah**

**Obrázky**

**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**

označkování  
označkování, dosažitelné  
označkování, rozšířené  
Parikův obraz  
past  
past, největší  
Petriho síť  
Petriho síť,  $k$ -ohraničená  
Petriho síť, mrtvá  
Petriho síť, ohraničená  
Petriho síť, uváznutá  
Petriho síť, živá  
podmínka, omezující  
posloupnost přechodů, souhlasící s alokací  
predikáty, stabilní  
problém, dosažitelnosti  
problém, inkluze dosažitelných označkování  
problém,  $k$ -ohraničenosti místa  
problém,  $k$ -ohraničenosti sítě  
problém, mrtvosti sítě  
problém, ohraničenosti místa  
problém, ohraničenosti sítě  
problém, pokrytelnosti  
problém, reachability  
problém, single-place zero reachability  
problém, sub-marking reachability  
problém, uváznutí sítě  
problém, zero-reachability

**Obsah**

**Obrázky**

**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**



problém, živosti přechodu  
problém, živosti sítě  
přechod  
přechod, mrtvý  
přechodový systém Petriho sítě  
přechod, uschopněný  
přechod, živý  
Ramseova věta  
run-place hrana  
sifon  
sifon, největší  
S-invariant  
S-invariant, pozitivní  
S-invariant, semipozitivní  
S-systém  
stopa stavu  
strom pokrytelnosti  
temporální logiky, action-based  
temporální logiky, atomické propozice  
temporální logiky, sémantika  
temporální logiky, state-based  
T-invariant  
T-invariant, pozitivní  
T-invariant, semipozitivní  
trace-ekvivalence  
T-systém

**Obsah**

**Obrázky**

**Rejstřík**

**Dopředu**

**Zpět**