Přijímací zkouška - matematika

Jméno a příjmení – pište do okénka	*Číslo přihlášky*	*Číslo zadání*
		1

Množiny, relace, funkce

1 Kolik prvků obsahuje množina $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$?

Zde A je libovolná množina o n prvcích a $\mathcal{P}(X)$ je potenční množina (tj. množina všech podmnožin) dané množiny X.

A $2^n + 2^n$
B 2^{n^2}
C n^4
D 2^{2^n}
***E** 2^{2n}

---

2 Relace $\{(a,a),(b,c),(c,b),(d,c)\}$ na množině $\{a,b,c,d\}$ je

A ekvivalencí
B injektivním zobrazením, které není surjektivní
C uspořádáním
***D** zobrazením, které není ani injektivní ani surjektivní
E surjektivním zobrazením, které není injektivní

---

3 Které množině je rovna množina $(C \setminus B) \setminus (C \setminus A)$?

(zde $X \setminus Y$ je množinový rozdíl množin X a Y)

A $A \cap C$
***B** $(C \cap A) \cap (A \setminus B)$
C $(C \cap A) \cap (C \cap B)$
D $A \cup C$
E $(C \cap A) \cup (C \cap B)$

---

4 Nechť $A = \{a,b\}$, $B = \{b,c\}$ a $C = \{(a,b),(c,b),(b,c)\}$. Čemu je rovná následující množina?

$(A \times B) \circ C$
(zde $\circ$ značí skládání relací, tedy $R \circ S = \{(x,y) \mid \exists z : (x,z) \in S, (z,y) \in R\}$)

A $\{(a,c)\}$
***B** $\{(a,b),(a,c),(c,b),(c,c)\}$
C $\{(a,b),(a,c),(c,b),(c,c),(b,c)\}$
D $\{(a,b),(a,c),(b,b),(c,c)\}$
E $\{(a,b),(b,c)\}$

---

5 Uvažme funkce F, G typu $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (tedy z celých čísel do celých čísel) definované takto:

$F(n) = n + 1$

$G(n) = 2n$

Označme F^{-1} funkci inverzní k funkci F (tj. $F^{-1}(F(n)) = n$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$).

Čemu se rovná $F(G(F^{-1}(G(F(1)))))$?

A 5
***B** 7
C 11
D 9
E 1

Logika

6 Uvažme formuli výrokové logiky $\varphi = A \Leftrightarrow B$.
Vyberte formuli, která je ekvivalentní formuli φ a která je zároveň v konjunktivním normálním tvaru (CNF).

A $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
***B** $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
C $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
D $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$
E $\neg A \wedge B \wedge A \wedge B$
(Formule je v CNF, pokud je konjunkcí klauzulí.)

7 Uvažme výrok: **Pro každé** $m > 0$ **existuje** $d \leq m$ **takové, že** $d = f(m)$**.**
Která z následujících formulí predikátové logiky vyjadřuje tento výrok?

***A** $\forall m\ (\ \neg(m \leq 0) \Rightarrow \exists d\ (\ d \leq m \wedge d = f(m)\,)\,)$
B $\forall m\ (\ \neg(m \leq 0) \wedge \exists d\ (\ d \leq m \Rightarrow d = f(m)\,)\,)$
C $\forall m\ (\ \neg(m \leq 0) \wedge \exists d\ (\ d \leq m \wedge d = f(m)\,)\,)$
D $\forall m\ (\ \neg(m \leq 0) \Rightarrow \exists d\ (\ d \leq m \Rightarrow d = f(m)\,)\,)$
E $\forall m\ (\ \neg(m \leq 0) \vee \exists d\ (\ d \leq m \wedge d = f(m)\,)\,)$

8 Předpokládejme, že interpretujeme proměnné x a y jako *celá čísla*, symbol $*$ jako standardní násobení celých čísel a symbol J jako celé číslo 1. Která z následujících formulí je pravdivá?

A $\forall x\ \forall y\ (x * y) = y$
B $\forall x\ \exists y\ (x * y) = J$
C $\forall x\ (\ (x * x = x)\ \Rightarrow\ x = J)$
***D** $\forall x\ (x * J = J * x\ \wedge\ x * J = x)$
E $\forall x\ (x * x) \neq x$

9 Předpokládejme, že všechny proměnné jsou interpretované jako *přirozená čísla*, symbol $*$ jako standardní násobení přirozených čísel a symbol J jako přirozené číslo 1. Pro jaké hodnoty proměnné x z množiny $\{3, 6, 9\}$ je pravdivá následující formule?
$\exists y\ (y \neq J \wedge \exists z\ (x = z * y * y)\,)$

***A** jen pro hodnotu 9
B jen pro hodnotu 3
C jen pro hodnotu 6
D pro všechny hodnoty z množiny $\{3, 6, 9\}$
E pro žádnou hodnotu z množiny $\{3, 6, 9\}$

10 Vyberte formuli výrokové logiky, která není tautologie a současně není kontradikce.

A $A \vee \neg A$
B $A \wedge \neg A$
***C** $A \Rightarrow \neg A$
D $A \Leftrightarrow \neg A$
E $A \Rightarrow A$
(Formule je tautologie, pokud je pravdivá ve všech ohodnoceních výrokových proměnných, a kontradikce, pokud není pravdivá v žádném ohodnocení výrokových proměnných.)

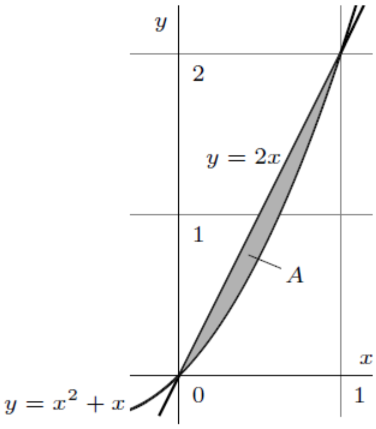
Matematická analýza

11 Vypočtěte obsah rovinného útvaru A obsahujícího přesně ty body (x, y) splňující následující nerovnosti:

$y \geq x^2 + x$

$y \leq 2x$

(viz obrázek).



A $\frac{1}{8}$

B $\frac{1}{5}$

***C** $\frac{1}{6}$

D 1

E 0

---

12 Uvažme reálnou funkci $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$. Tato funkce nabývá na $\mathbb{R}$ *lokálního maxima* v jediném bodě x_0. Který z následujících bodů je roven x_0?

***A** 0
B 4
C -1
D 2
E 1

---

13 Čemu je roven neurčitý integrál $\int 1 + 4x^3 + e^x dx$? (U všech možností je obvyklá integrační konstanta značena C.)

A $x + 2x^4 + e^{x+1} + C$
B $x^4 + x \cdot e^{x-1} + C$
C $1 + 12x^2 + e^x + C$
***D** $x + x^4 + e^x + C$
E $12x^4 + e^x + C$

---

14 Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definována následujícím způsobem:
$a_n = \frac{n}{n^5+2}$
Čemu je rovna limita $\lim_{n\to\infty} a_n$?

A 2
B $+\infty$
C 1
D limita neexistuje
***E** 0

---

15 Uvažme reálnou funkci $f(x) = \frac{1}{x} + 1$. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé.

A Existuje číslo x v definičním oboru funkce f, pro které platí $f(x) = 1$.
B Definiční obor funkce f je množina $\mathbb{R}$.
C Funkce f má limitu ve všech bodech $\mathbb{R}$.
D Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$.
***E** Funkce je klesající na intervalu $(0, \infty)$.

(Tip: Může Vám pomoci, pokud si načrtnete graf funkce f.)

Lineární alegbra

---

16 Určete řešení následující soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 12 \\ & & y & + & 2z & = & 7 \end{array}$$

A soustava má více než jedno, ale konečně mnoho řešení
B jediné řešení je $x = 1, y = 1, z = 3$
***C** soustava má nekonečně mnoho řešení
D jediné řešení je $x = 3, y = 1, z = 1$
E soustava nemá řešení

---

17 Mějme lineární zobrazení A z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ takové, že platí $A(2) = 3$. Pak $A(5) =$

A nelze určit ze zadání
B $\frac{13}{2}$
C $(2, 3, 5)$
D $(2, 5)$
***E** $\frac{15}{2}$

---

18 Najděte souřadnice vektoru $(2, 1, 0)$ v bázi $((1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, -1))$.

***A** $(1, 1, 1)$
B $(3, 1, 0)$
C není určeno jednoznačně
D $(2, 1, 0)$
E $(0, 0, 0)$

---

19 Která z následujících matic zadává lineární zobrazení A z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které otáčí rovinu o 90° po směru hodinových ručiček?

A $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

***B** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(Každá matice M zadává lineární zobrazení A předpisem $A(\vec{v}) = M\vec{v}$.)

---

20 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$

A $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 14 & 12 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 13 & 13 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

***E** $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}$

Grafy a grafové algoritmy

21 Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf.
Řekneme, že graf G je *bipartitní*, jestliže existují disjunktní množiny vrcholů V_1, V_2 takové, že $V_1 \cup V_2 = V$ a že každá hrana v grafu spojuje vrchol z množiny V_1 s vrcholem z množiny V_2. (Alternativně: G je bipartitní, právě když je možné každý vrchol označit jedním z čísel 1, 2 tak, aby každá hrana spojovala vrcholy označené různými čísly.) Které z následujících tvrzení je pravdivé?

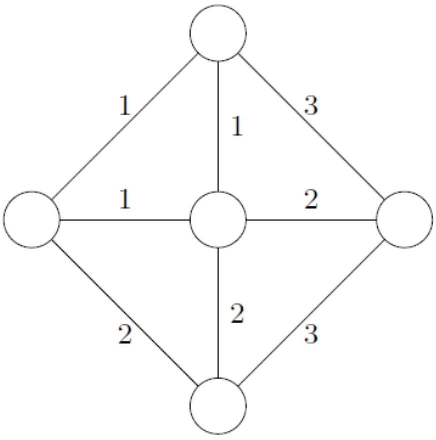
A Každý souvislý bipartitní graf je acyklický.
B Každý bipartitní graf je souvislý.
C V každém bipartitním grafu o n vrcholech má každý vrchol nejvýše $\frac{n}{2} + 1$ sousedů.
D Neexistuje žádný souvislý bipartitní graf o třech vrcholech.
***E** Každý acyklický graf je bipartitní.

---

22 Mějme neorientovaný graf G ve kterém pro libovolnou dvojici vrcholů u ,v značíme $\delta(u, v)$ délku (tj. počet hran) nějaké nejkratší cesty z u do v. Nechť s, v, t je nějaká trojice vrcholů taková, že v leží na nějaké nejkratší cestě z s do t. Pak platí:

A Platí buď $\delta(s, t) < \delta(s, v) + \delta(v, t)$ nebo $\delta(s, t) = \delta(s, v) + \delta(v, t)$, přičemž obecně nelze určit, která z těchto dvou možností nastává.
B Platí buď $\delta(s, t) = \delta(s, v) + \delta(v, t)$ nebo $\delta(s, t) > \delta(s, v) + \delta(v, t)$, přičemž obecně nelze určit, která z těchto dvou možností nastává.
C $\delta(s, t) > \delta(s, v) + \delta(v, t)$
***D** $\delta(s, t) = \delta(s, v) + \delta(v, t)$
E $\delta(s, t) < \delta(s, v) + \delta(v, t)$

23 Uvažme následující neorientovaný, hranově ohodnocený graf:



Jaká je váha (tj. součet ohodnocení hran) jeho libovolné minimální kostry?

A 5
B 7
C 3
***D** 6
E 4

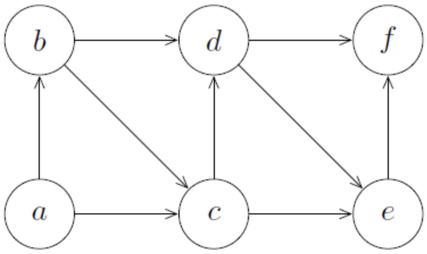
---

24 Z následujících čísel vyberte nejmenší číslo m takové, že existuje *souvislý neorientovaný* graf o 10 vrcholech a m hranách.

A $m = 5$
B $m = 0$
C $m = 45$
D $m = 10$
***E** $m = 9$

---

25 Uvažme následující orientovaný graf:



Rozhodněte, která z následujících posloupností vrcholů *může* vzniknout jako pořadí objevení vrcholů při prohledání grafu *do hloubky* z vrcholu a. (Nepředpokládáme žádné uspořádání na vrcholech. Pořadí, ve kterém algoritmus prohledání do hloubky objevuje nové vrcholy, tedy není jednoznačně dáno.)

A a, b, c, e, d, f
B a, c, d, b, f, e
C a, c, d, f, b, e
***D** a, c, d, e, f, b
E a, c, e, b, d, f